

# **Seleção e Avaliação de Modelos de Campos de Tensões**

Modelos de vigas parede contínuas

**Décio Alexandre de Matos e Góis Caupers**

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Civil**

## **Orientadores:**

Professor Doutor João Carlos de Oliveira Fernandes de Almeida

Professor Doutor Miguel Filipe Passos Sérgio Lourenço

## **Júri:**

Presidente: Professor Mário Manuel Paisana dos Santos Lopes

Orientador: Professor Doutor Miguel Filipe Passos Sérgio Lourenço

Vogal: Professor António José da Silva Costa

Dezembro de 2020



## **Declaração**

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.



## Resumo

Os métodos de escoras e tirantes (MET) ou métodos de campos de tensões (MCT) são os métodos usualmente utilizados para o dimensionamento de zonas de descontinuidade, zonas D, de estruturas de betão armado ou pré esforçado. Estes métodos são baseados em caminhos de carga das trajetórias dos campos de tensões e a segurança da estrutura é garantida através do equilíbrio, resistência e ductilidade das estruturas. Assim sendo, existem vários modelos em equilíbrio para a mesma estrutura que podem ser utilizados. Visto que na conceção destes modelos questões relacionadas com a compatibilidade não são levantadas, nem todos proporcionam uma resposta adequada da estrutura em serviço, principalmente no que diz respeito à fendilhação.

Baseado no método dos elementos finitos, Ruiz e Muttoni (2007) apresentam uma nova abordagem que considera a compatibilidade na análise de modelos de campos de tensões, permitindo avaliar e selecionar o melhor modelo. Desta forma, é possível analisar a resposta da estrutura a cada incremento de carga ajudando a perceber se o comportamento em serviço é adequado.

Através de análises não lineares de elementos finitos, nesta dissertação são avaliados diversos modelos de escoras e tirantes de uma viga contínua uniformemente carregada no topo ajudando a perceber a liberdade do projetista no dimensionamento de vigas parede contínuas. São variados alguns parâmetros de modelo para modelo e documentada a resposta do modelo a essa variação.

**Palavras-chave:** Modelo de escoras e tirantes, modelo de campos de tensões, viga parede contínua, comportamento em serviço, método dos elementos finitos



# ABSTRACT

Strut-and-tie models or stress field models are commonly used methods for the dimensioning and design of discontinuity zones of reinforced and prestressed concrete structures. These methods are based on the load path of the stress trajectories, and the safety of the region is secured by establishing the equilibrium, resistance and ductility of the entire model. So, a few equilibrated models can be proposed for a structural member subjected to a load combination but, since no compatibility questions are yet considered, not all provide a good service behaviour.

Based on the finite element method, Ruiz and Muttoni (2007) presented a new approach that covers that question, helping to evaluate and select stress field models for discontinuity concrete regions. Therefore, it is possible to analyse the response of the structural member at each load increment, helping to establish if the service behaviour of the structure is adequate or not.

Applying non-linear finite element method analysis, this paper intends to evaluate a few continuous deep beams models subjected to a uniform load helping to realize how far from the elastic trajectories stress field models the designers can go when dimensioning deep beams. Some parameters variations are made and the response of the structure, due to that variation, is documented.

**Key Words:** Strut-and-tie models, Stress Field models, continuous deep beam, service behaviour, finite element method





## Agradecimentos

Em primeiro lugar, endereço os meus agradecimentos ao meu orientador Professor Doutor João Almeida por me ter encaminhado numa fase final e tão decisiva do meu percurso académico, permitindo a execução deste meu trabalho. O conhecimento por si partilhado nas diversas aulas e a maneira como as expôs, foram um grande estímulo ao longo do meu percurso académico e serão para sempre lembrados.

Ao meu coorientador, Professor Doutor Miguel Lourenço, gostaria de dedicar o meu maior agradecimento e de expressar a minha profunda gratidão pela partilha de conhecimento, e pelo papel decisivo na orientação do presente trabalho, demonstrando sempre uma incansável disponibilidade para o esclarecimento de dúvidas e discussão de resultados.

Ao engenheiro Miguel Ferreira agradeço a disponibilização do programa *Eva/S* e ao tempo despendido nas sessões de esclarecimento de dúvidas, que por algumas vezes foram essenciais para o progresso da presente dissertação.

Aos meus colegas e amigos de curso Alexandre Ramos, Bruno Carvalho, Miguel Silva e Vitor Batista agradeço o companheirismo demonstrado ao longo do curso, quer nos trabalhos desenvolvidos em conjunto, quer pelos bons momentos passados fora do âmbito académico.

Ao meu colega e grande amigo Arnaldo Guimarães, não podia deixar de endereçar um especial reconhecimento, não só pelo companheirismo também demonstrado ao longo destes anos, mas também pelas inúmeras horas de estudo em conjunto e pelo apoio sempre demonstrado nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais e à minha irmã, os meus pilares ao longo desta caminhada, agradeço a força que sempre me deram. A perseverança, sentido de responsabilidade, determinação e dedicação vêm de casa e sem estes valores esta jornada não seria possível.

Gostaria também de agradecer a todos os meus amigos, tios, primos e restantes familiares que sempre acreditaram em mim.

Por fim, a todos que se cruzaram comigo nesta caminhada, quer do IST, quer fora do ambiente académico, e que de alguma forma tiveram participação na minha trajetória o meu profundo agradecimento.



# Índice

Declaração.....	iii
Resumo.....	v
ABSTRACT.....	vii
Agradecimentos.....	ix
Índice de Figuras.....	xiii
Índice de Tabelas.....	xvii
Índice de Gráficos.....	xviii
Índice de Abreviaturas.....	xix
Índice de Símbolos.....	xx
1.Introdução.....	1
1.1.Contextualização.....	1
1.2.Objetivos.....	2
1.3.Organização.....	2
2. Dimensionamento de Estruturas de Betão armado com zonas de descontinuidade.....	3
2.1.Introdução.....	3
2.2.Definição de Zonas D.....	4
2.3. Dimensionamento de Zonas D.....	5
2.4.Modelo de Escoras e Tirantes (MET).....	5
2.4.1. Método do Caminho de Carga.....	5
2.4.2. Dimensionamento das Escoras.....	7
2.4.3. Dimensionamento dos Tirantes.....	8
2.4.4. Dimensionamento dos Nós.....	8
2.5. Técnicas de seleção de MET.....	11
2.6. MET para Vigas Parede Contínuas.....	17
2.6.1. Modelo baseado nas tensões elásticas.....	17
2.6.2. Vigas Contínuas como estruturas estaticamente indeterminadas.....	17
3. Seleção e avaliação de Modelos de Campos de Tensão através de Elementos Finitos.....	19
3.1. Modelação com Elementos Finitos.....	19
3.1.1. Modelação do Betão.....	19

3.1.2. Modelação do Aço .....	21
3.2. Análise de Vigas Parede Contínuas Uniformemente Carregadas no Topo Através de Elementos Finitos .....	21
3.2.1. Geometria e Considerações Iniciais .....	21
3.2.2. Dimensionamento e Modelação do Modelo de Referência.....	23
3.2.3. Modelos com Braços Associados às Trajetórias Elásticas .....	31
3.2.4. Modelos com Braço único ( $z = 0.7L$ ) .....	46
3.2.5. Síntese dos resultados principais .....	55
3.2.6. Comparação com Resultados de outros autores .....	57
4. Considerações finais e desenvolvimentos futuros .....	59
4.1. Considerações finais.....	59
4.2. Desenvolvimentos futuros.....	60
Bibliografia .....	61
ANEXOS.....	63

# Índice de Figuras

<b>Figura 1</b> - Modelo de treliça de Ritter e Morsch. (Adaptado das Folhas de Apoio às aulas de Estruturas de Betão I & II do ano letivo 2018/2019, MEC - Instituto Superior Técnico).....	3
<b>Figura 2</b> - Zonas D com andamentos não lineares devido a: a) descontinuidades geométricas; b) descontinuidades estáticas e/ou geométricas. (Adaptado de Toward a Consistent Design of Structural Concrete, 1987).....	4
<b>Figura 3</b> - Campo de tensões nas zonas B e D de uma viga (adaptado de (Toward a Consistent Design of Structural Concrete, 1987). ....	4
<b>Figura 4</b> - Definição de zonas B e D (Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987).....	5
<b>Figura 5</b> - Aplicação dos caminhos de carga (à esquerda) e respetivo MET (à direita) (Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987) .....	6
<b>Figura 6</b> - Aplicação dos caminhos de carga em estruturas com momento fletor (à esquerda) e respetivo MET (à direita). (Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987) .....	6
<b>Figura 7</b> - Trajetória elástica do campo de tensões. (Adaptado de Schlaich, Schäfer, Jennewein, 1987) .....	7
<b>Figura 8</b> - Campos de compressão considerados (a) "Leque" (b) "Garrafa" (c) Prismático (Adaptado de Schalich, Schäfer, Jennewein, 1987) .....	7
<b>Figura 9</b> - Dimensionamento de nós CCC. (Adaptado de EC 2 1-1) .....	9
<b>Figura 10</b> - Dimensionamento de nós CCT (Adaptado de EC 2 1-1).....	9
<b>Figura 11</b> - Dimensionamento de nós CTT (Adaptado de EC 2 1-1) .....	10
<b>Figura 12</b> – MET bem efetuado com base no critério de menor deformação (à esquerda) e MET mal efetuado com base no mesmo critério (Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987).....	11
<b>Figura 13</b> - Abertura de fenda num campo de compressões. (Adaptado de Muttoni et. al, 1996) .....	12
<b>Figura 14</b> - (a) Malha de possíveis encaminhamentos de carga e (b) respetiva otimização. (Adaptado de Ruiz e Muttoni, 2007) .....	12
<b>Figura 15</b> - Processo de seleção do campo de tensões de uma viga parede carregada na zona inferior na sua (a) iteração 20, (b) iteração 40, (c) a solução final e (d) o MET adotado. (Adaptado de Liang et al, 2000).....	13
<b>Figura 16</b> - (a) MET obtido (b) MET antes da otimização geométrica (c) MET depois da otimização geométrica. (Adaptado de Kostic, 2006) .....	14
<b>Figura 17</b> - MET para (a) o estado não tensionado, formação de fendas para (b) uma disposição ortogonal de armaduras e (c) uma disposição circular de armaduras e MET para (d) estado fendilhado e (e) ELS (Adaptado de Vitone et. al, 2006) .....	15
<b>Figura 18</b> - Esquema representativo dos elementos presentes no MCTA. (Adaptado de Lourenço e Almeida, 2010) .....	16
<b>Figura 19</b> - MET para (a) viga contínua com dois tramos e (b) tramo intermédio de uma viga contínua. (Adaptado de FIP- Pratical design of structural concrete, 1999) .....	17
<b>Figura 20</b> - Distribuições de momentos estaticamente admissíveis. (Adaptado de Muttoni et. al, 1996) .....	18

<b>Figura 21</b> - (a) Deformações do elemento de betão; (b) Círculo de Mohr de deformações; (c) Direções de deformação principais. (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007) .....	19
<b>Figura 22</b> - Relação tensão-deformação real e adotada para a modelação do betão. (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007) .....	20
<b>Figura 23</b> - (a) campos e deslocamentos dos CST; (b) Campo de deformações dos CST; (c) Campo de tensões para a tensão principal $i$ ; (d) Forças nodais; (e) Ângulo $\beta$ em cada nó $j$ . (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007) .....	20
<b>Figura 24</b> - (a) Campo de deslocamentos do elemento de aço; (b) Forças nodais no elemento de aço; (c) Relação tensão-deformação do aço. (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007) .....	21
<b>Figura 25</b> - "Tension Stiffening" no betão armado fendilhado. (Adaptado de Marti, 2013) .....	21
<b>Figura 26</b> - Geometria da viga parede contínua a analisar. (Dimensões em metros) .....	22
<b>Figura 27</b> - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo de referência. (Dimensões em metros) .....	23
<b>Figura 28</b> - Pormenorização do modelo de referência. ....	25
<b>Figura 29</b> – (a) Modelo de elementos finitos para o modelo de referência e (b) deformada ampliada da viga parede. Modelo efetuado no EvalS. ....	25
<b>Figura 30</b> - Andamento qualitativo das tensões no betão, retirado do programa EvalS, para os carregamentos (a) $q/q_d = 0.1$ e (b) $q/q_d = 1$ . ....	26
<b>Figura 31</b> – Forças aplicadas na armadura, retiradas do programa EvalS, para os carregamentos (a) $q/q_d = 0.1$ e (b) $q/q_d = 1$ . ....	26
<b>Figura 32</b> - Altura da zona com abertura de fendas acima do apoio intermédio para (a) $q/q_d = 0.5$ , (b) $q/q_d = 0.7$ , (c) $q/q_d = 1$ e (d) $q/q_d = 1.4$ , sendo $h$ = altura total da viga. ....	29
<b>Figura 33</b> – Altura da zona com abertura de fendas acima da armadura a meio vão do tramo de extremidade para (a) $q/q_d = 0.5$ , (b) $q/q_d = 0.7$ , (c) $q/q_d = 1$ e (d) $q/q_d = 1.4$ . ....	30
<b>Figura 34</b> - Altura da zona com abertura de fendas acima da armadura a meio vão do tramo intermédio para (a) $q/q_d = 0.5$ , (b) $q/q_d = 0.7$ , (c) $q/q_d = 1$ e (d) $q/q_d = 1.4$ . ....	31
<b>Figura 35</b> - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com 0.5pl de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros) .....	32
<b>Figura 36</b> - Quantidade de armadura de cálculo do modelo com 0.5pl de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros) .....	32
<b>Figura 37</b> - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com 0.45pl de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros) .....	33
<b>Figura 38</b> - Quantidade de armadura calculada do modelo com 0.45pl de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. ....	34
<b>Figura 39</b> - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com 0.35pl de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros) .....	34
<b>Figura 40</b> - Quantidade de armadura do modelo com 0.35pl de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. ....	35
<b>Figura 41</b> - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com 0.2pl de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros) .....	35

<b>Figura 42</b> - Quantidade de armadura calculada para o modelo com 0.2pl de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros) .....	36
<b>Figura 43</b> - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com reação nula no apoio de extremidade. (Dimensões em metros) .....	36
<b>Figura 44</b> - Quantidade de armadura do modelo com reação nula no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros) .....	37
(*) – Valor inferior à área de armadura mínima.....	37
<b>Figura 45</b> – Modelação dos modelos com braços associados à trajetória elástica no EvalS.....	38
modelos com os braços elásticos. ....	39
<b>Figura 46</b> - Tensões no betão nos modelos com braços elásticos para o incremento de carga $q/q_d=1$ . .....	45
<b>Figura 47</b> - MET para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.45pl. .....	46
<b>Figura 48</b> - MET para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.4pl. .....	47
<b>Figura 49</b> – Quantidade de armadura calculada para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.4pl em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros) .....	47
<b>Figura 50</b> - MET para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.25pl. .....	48
<b>Figura 51</b> - Quantidade de armadura do modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.25pl em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros) .....	48
<b>Figura 52</b> - MET para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade nula. .....	49
<b>Figura 53</b> - Quantidade de armadura calculada para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade nula em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros) .....	49
<b>Figura 54</b> - Modelação dos modelos com braço único equivalente a 0.7L no EvalS .....	50
<b>Figura 55</b> – Representação qualitativa das tensões na zona da armadura de reforço no apoio intermédio.....	52
<b>Figura 56</b> - Tensões no betão, nos modelos 1.0-0.6-1.0, 0.0-3.8-0.0 e 0.0-2.2-0.25 para o incremento de carga $q/q_d=1$ . ....	54
<b>Figura 57</b> - Limites de redistribuição segundo as análises efetuadas. ....	57
<b>Figura 58</b> – Alguns modelos de vigas parede contínuas analisados por Lourenço (2010). (Adaptado de Lourenço, 2010) .....	57
<b>Figura A-1</b> – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 2-0.7-1.6.....	64
<b>Figura B-1</b> – Andamento das tensões no betão para o modelo 2-0.7-1.6 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . ....	64
<b>Figura A-2</b> - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 1.4-0.7-1.3.....	65
<b>Figura B-2</b> - Andamento das tensões no betão para o modelo 1.4-0.7-1.3 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . ....	65
<b>Figure A-3</b> – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.5-2.6-0.76.....	66

<b>Figura B-3</b> - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.5-2.6-0.76 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . .....	66
<b>Figura A-4</b> – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.1-6.4-0.25.....	67
<b>Figura B-4</b> - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.1-6.4-0.25 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . .....	67
<b>Figura A-5</b> – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.1-7-0.1.....	68
<b>Figura B-5</b> - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.1-7-0.1 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . .....	68
<b>Figura A-6</b> - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 1-0.7-1.....	69
<b>Figura B-3</b> - Andamento das tensões no betão para o modelo 1-0.7-1 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . .....	69
<b>Figura A-4</b> - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.25-2.2-0.1.....	70
<b>Figura B-7</b> - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.25-2.2-0.1 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . .....	70
<b>Figura A-8</b> - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.1-3.8-0.1.....	71
<b>Figura B-8</b> - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.1-3.8-0.1 nos incrementos de carga $q/q_d=0.5$ e $q/q_d=1$ . .....	71



## Índice de Tabelas

<b>Tabela 1</b> - Cálculo da armadura no MET do modelo de referência.....	24
<b>Tabela 2</b> - Quantidade de armadura e nomenclatura dos modelos. ....	37
<b>Tabela 3</b> - Nomenclatura atribuída aos modelos com braços iguais.....	50
<b>Tabela 4</b> – Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço no tramo intermédio. .	55
<b>Tabela 5</b> - Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço no apoio intermédio....	55
<b>Tabela 6</b> - Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço no tramo de extremidade. .....	56
<b>Tabela 7</b> - Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço da viga parede contínua. .....	56

# Índice de Gráficos

<b>Gráfico 1</b> - Andamento da tensão média na armadura de reforço no apoio intermédio e previsão segundo o MET dimensionado para o modelo de referência. ....	27
<b>Gráfico 2</b> - Andamento da tensão máxima na armadura de reforço no apoio intermédio no modelo de referência.....	28
<b>Gráfico 3</b> - Tensões na armadura mínima distribuída acima da armadura de reforço na zona do apoio intermédio para o modelo de referência.....	28
<b>Gráfico 4</b> - Andamento da tensão na armadura de reforço no tramo de extremidade e previsão da tensão segundo o MET dimensionado para o modelo de referência. ....	29
<b>Gráfico 5</b> - Andamento da tensão na armadura de reforço do tramo intermédio e previsão da tensão segundo o MET dimensionado para o modelo de referência. ....	30
<b>Gráfico 6</b> - Andamento das tensões na armadura inferior a meio vão do tramo intermédio para os modelos com os braços elásticos. ....	39
<b>Gráfico 7</b> - Tensões na armadura mínima distribuída acima da armadura de reforço na zona de meio vão do tramo intermédio para o modelo 2.0-0.0-1.6. ....	40
<b>Gráfico 8</b> - Tensões na armadura mínima distribuída acima da armadura de reforço na zona de meio vão do tramo intermédio para o modelo 1.4-0.4-1.3. ....	40
<b>Gráfico 9</b> – Tensão média nas armaduras de reforço no apoio intermédio para os modelos com o braço elástico.....	41
<b>Gráfico 10</b> - Tensão máxima nas armaduras de reforço no apoio intermédio nos modelos com o braço elástico.....	41
<b>Gráfico 11</b> - Tensões na armadura mínima no apoio intermédio para o modelo 0.0-7.0-0.0. ....	42
<b>Gráfico 12</b> - Tensões na armadura mínima no apoio intermédio para o modelo 0.0-6.4-0.25. ....	42
<b>Gráfico 13</b> - Tensões na armadura mínima no apoio intermédio para o modelo 0.5-2.6-0.76. ....	43
<b>Gráfico 14</b> - Tensão na armadura de reforço no tramo de extremidade nos modelos com braços associados às trajetórias elásticas.....	43
<b>Gráfico 15</b> - Tensões na armadura mínima do tramo de extremidade do modelo 2.0-0.0-1.6.....	44
<b>Gráfico 16</b> - Tensões na armadura mínima no tramo de extremidade do modelo 1.4-0.4-1.3.....	44
<b>Gráfico 17</b> - Tensões na armadura mínima no tramo de extremidade do modelo 0.5-2.6-0.76.....	45

# Índice de Abreviaturas

CST – *Constant Strain Triangles*

EC2 – Eurocódigo 2

ELS – Estado limite de serviço

ELU – Estado limite último

MCTA – Modelo de Campo de Tensões Adaptativo

MCT – Modelo de Campos de Tensões

MEF – Método dos Elementos Finitos

MET – Modelo de Escoras e Tirantes

Nó CCC – Nó de interseção de escoras

No CCT – Nó de interseção de um tirante e duas escoras

Nó CTT – Nó de interseção de dois tirantes e uma escora

Zonas B – zonas onde o princípio de Bernoulli é válido

Zonas D – Zonas onde o campo de deformações não é linear

# Índice de Símbolos

## Capítulo 2

$h$  – altura correspondente à zona de descontinuidade com base no princípio de Saint-Venant

$z$  – braço interno da viga parede

$\sigma_{Rd,máx}$  – tensão de compressão resistente

$f_{cd}$  – valor de dimensionamento da resistência do betão à compressão

$\nu'$  - fator de redução da tensão de compressão resistente

$f_{ck}$  – tensão de compressão característica do betão

$A_s$  – Área de armadura

$F_{yd}$  – tensão de cedência de dimensionamento do aço

$k_1$  – fator a considerar no cálculo da tensão máxima de compressão no nó CCC

$k_2$  – fator a considerar no cálculo da tensão máxima de compressão no nó CCT

$k_3$  – fator a considerar no cálculo da tensão máxima de compressão no nó CTT

$F_i$  – força aplicada na escora ou tirante  $i$

$l_i$  - comprimento do membro  $i$

$\epsilon_{mi}$  - deformação do membro  $i$

$q$  – valor da carga uniformemente distribuída na viga parede contínua

$l$  – vão da viga

## Capítulo 3

$\sigma_i$  – tensão segundo a direção  $i$

$\epsilon_i$  – deformação na direção  $i$

$\epsilon_j$  – deformação na direção  $j$

$E_c$  – módulo de elasticidade

$f_{cp}$  – resistência à compressão do betão utilizada no método dos elementos finitos

$f'_c$  - resistência à compressão do betão proveniente do ensaio cilíndrico

$\eta(\epsilon_j)$  – parâmetro numérico para a influência da deformação transversal na resistência do betão

$F_{j,i}$  – forças nodais

$\beta_j$  – ângulo interno do elemento CST

$l_j$  – comprimento do lado  $j$  do elemento CST

$l_{j+1}$  – comprimento do lado  $j+1$  do elemento CST

$f_y$  – tensão de cedência do aço

$E_h$  – módulo de elasticidade pós cedência

$A_{s,i}$  – área da secção do elemento de aço modelado

$l$  – vão da viga

$C$  – Valor de compressão associado à escora

$T$  – Valor da tração associado ao tirante

$A_s$  – área de armadura

$A_c$  – área de betão

$A_{s,min}$  – armadura mínima

$q/q_d$  – quociente entre a carga aplicada e a carga de dimensionamento

$h$  – altura total da viga

$p$  – valor associado ao carregamento uniformemente distribuído

$R$  – reação no apoio

$A_{s,Reff}$  – armadura colocada no modelo de referência

$s/f_{ys}$  – quociente entre a tensão aplicada na armadura e a tensão de cedência da armadura

$z$  – braço interno da viga parede

# 1.Introdução

## 1.1.Contextualização

O modelo de treliça, introduzido por Ritter e Mörsch, nos finais do século XIX e inícios do século XX, é o modelo ainda hoje utilizado para o dimensionamento de vigas correntes. Foi o primeiro modelo que considerou o mecanismo de transmissão de carga em elementos de betão armado sujeitos a esforço transversal e flexão. No entanto este modelo cobre apenas parte das tipologias estruturais de betão conhecidas de hoje em dia, estruturas correntes contínuas em que teoria de Bernoulli é válida, onde o dimensionamento dos elementos pode ser efetuado com base em esforços seccionais, considerando que a secção permanece plana após a deformação. As zonas de descontinuidade, zonas como aberturas, cantos, vigas com degrau, vigas parede ou vigas parede contínuas, que serão alvo de estudo nesta dissertação, requerem outro tipo de abordagem.

A análise de zonas de descontinuidade requer a aplicação de modelos de dimensionamento diferentes, como é o caso dos modelos de escoras e tirantes e modelos de campos de tensões, desenvolvidos por Leonhardt (Leonhardt & Walther, 1966), Thurlimann e Muttoni (Muttoni, Schwartz, & Thurlimann, 1996), Schlaich (Schlaich, Schäfer, & Jennewein, 1987) entre outros, que se baseiam em princípios semelhantes aos modelos de Ritter e Mörsch, mas que podem ser aplicados a qualquer região de betão estrutural. Os modelos traduzem o campo de tensões da estrutura, com base no seu encaminhamento de carga, representados por escoras e tirantes, unidos em nós.

Estes modelos, fundados nos princípios da teoria da plasticidade, permitem alguma liberdade ao projetista no que diz respeito à escolha do modelo de dimensionamento, no entanto esta liberdade pode ser condicionada pelo comportamento em serviço. Desta forma, diversos autores como Vitone (Vitone, Palmisano, & Vitone, 2006), Schlaich (Schlaich M. , Oktober 1989), Kostic (Kostic, 2006), Liang (Liang, Xie, Steven, & P., 2000) ou Lourenço (Lourenço, 2010) têm vindo a desenvolver técnicas de seleção automática do melhor modelo de escoras e tirantes a considerar no dimensionamento de zonas de descontinuidade. Fernández e Muttoni (Ruiz & Muttoni, 2007) introduziram a análise de modelos de campos de tensões com recurso a elementos finitos, possibilitando ter em consideração a compatibilidade.

O caso de estudo da presente dissertação é uma viga de betão com uma relação entre a altura e o vão que lhe permite ser classificada como viga parede. Esta consideração afasta a possibilidade de dimensionamento da mesma com base no princípio de Bernoulli com a precisão requerida, visto que o campo de tensões de uma viga parede não é linear. Assim sendo recorreu-se ao método utilizado para o dimensionamento de zonas descontínuas, os modelos de escoras e tirantes.

Sendo modelos baseados no equilíbrio, existem diversas soluções possíveis. Neste sentido, efetuou-se a pormenorização da viga parede para vários modelos de escoras e tirantes e assumindo diversos níveis de redistribuição interna de tensões e, posteriormente, elaborou-se uma análise não linear de elementos finitos de cada pormenorização de modo a avaliar o comportamento em serviço.

## 1.2.Objetivos

O principal objetivo da presente dissertação passa pelo estudo do comportamento em serviço duma viga parede contínua de betão armado, sujeita a um carregamento uniforme no topo.

Os modelos de vigas parede contínuas apresentam uma grande liberdade, que pode conduzir a uma grande variação nas quantidades de armaduras a adotar, pelo que deverá ser dada uma especial atenção ao comportamento da estrutura em serviço.

São elaborados vários modelos onde se varia alguns parâmetros e se analisa a resposta da estrutura a esta variação. Sendo vigas parede contínuas, faz-se variar a quantidade de armadura na face inferior da viga, correspondente ao meio vão, e a quantidade de armadura sobre o apoio. Esta variação abrange desde o modelo que considera a viga contínua como vigas simplesmente apoiadas, até a consideração da viga totalmente em consola. Quando o modelo efetuado não tem armadura de cálculo específica é colocada a armadura mínima especificada para vigas parede. Para cada situação são pormenorizadas as armaduras e efetua-se uma análise não linear de elementos finitos recorrendo ao programa *EvalS*, desenvolvido por Miguel Ferreira (Ferreira, Lourenço, & Almeida, 2017). Sendo uma análise incremental é possível estimar tensões no betão e nas armaduras para diversos níveis de carga e como as tensões nas armaduras estão diretamente relacionadas com a abertura de fendas, são avaliadas as tensões nas armaduras nos diversos modelos, para as cargas de serviço.

O objetivo principal é quantificar a liberdade na escolha do modelo de dimensionamento sem comprometer o comportamento em serviço para vigas parede contínuas.

## 1.3.Organização

A dissertação é constituída por quatro capítulos principais. O primeiro capítulo diz respeito à introdução. É neste capítulo que é explicado o objetivo da dissertação e contextualizado de uma forma geral o seu conteúdo.

O segundo capítulo é referente ao estado da arte. Este capítulo está subdividido em duas partes. Na primeira parte, subcapítulos 2.1 a 2.4, é explicada a essência dos modelos de dimensionamento de zonas D, isto é, o modelo de escoras e tirantes (MET), e são detalhadas as regras associadas à sua execução. Na segunda parte, subcapítulos 2.6 e 2.7, são catalogados e analisados processos de otimização e técnicas de seleção do melhor MET, já estudados por outros autores.

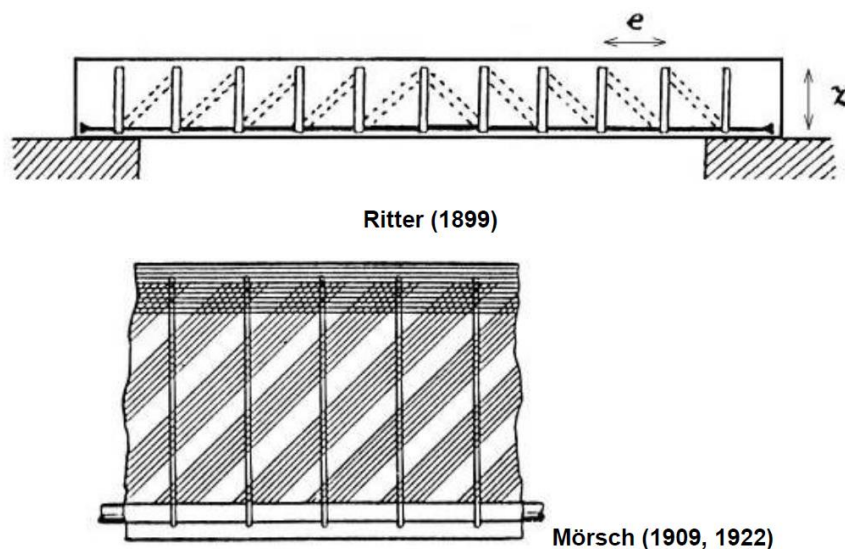
Ao terceiro capítulo está destinado o estudo propriamente dito do comportamento da viga parede contínua a utilizar nesta dissertação. Aqui é feita a exposição detalhada do caso em estudo, assim como a apresentação e dimensionamento de todos os modelos testados, critérios de seleção de modelos e os respetivos resultados. No fim deste capítulo é feita uma comparação entre os resultados obtidos neste estudo e os resultados obtidos por outros autores.

Por fim, no quarto e último capítulo, são expostas todas as ilações e conclusões retiradas do estudo efetuado.

## 2. Dimensionamento de Estruturas de Betão armado com zonas de descontinuidade

### 2.1.Introdução

Como foi introduzido no capítulo anterior, foi no final e início dos séculos XIX e XX, respetivamente, que Ritter e Mörsch compreenderam o mecanismo de transmissão de carga em estruturas de betão armado sujeitas a esforço transverso e flexão. Através de ensaios experimentais foi apresentado o modelo mais conhecido como o modelo de treliça que é, ainda nos dias de hoje, o modelo utilizado para calcular e dimensionar vigas de betão armado correntes. Este modelo comprovou que os estribos funcionam à tração, à semelhança do que acontece com a armadura longitudinal, contribuindo tal como as bielas inclinadas, para a transmissão de carga para os apoios. A figura 1 representa os modelos concebidos por Ritter e Mörsch.



**Figura 1** - Modelo de treliça de Ritter e Mörsch. (Adaptado das Folhas de Apoio às aulas de Estruturas de Betão I & II do ano letivo 2018/2019, MEC - Instituto Superior Técnico)

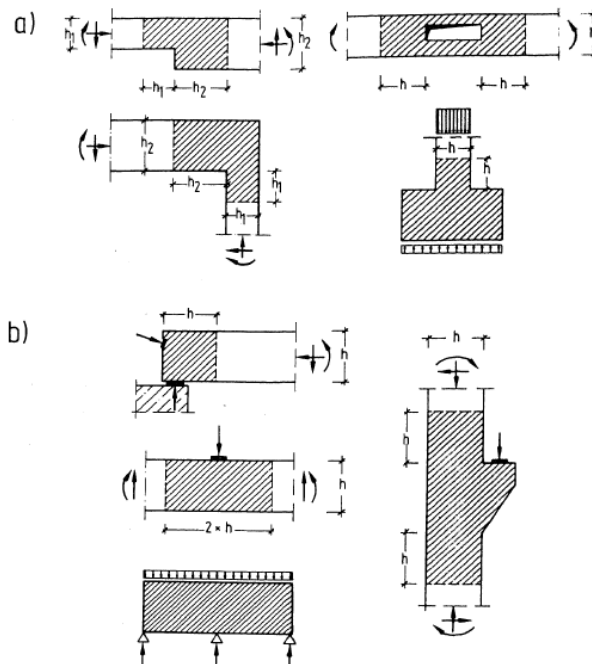
No entanto este modelo apenas cobre certas tipologias estruturais conhecidas. A estas tipologias é atribuído o nome de zonas B. Tratam-se de zonas onde a teoria de Bernoulli é válida i.e. onde a distribuição das tensões na secção é linear, o que conduz a campos de tensões prismáticos na alma da viga, podendo por isso ser calculadas e dimensionadas através dos esforços seccionais (momento fletor e torsor, esforço transverso e esforço axial).

Em zonas de descontinuidade, zonas D, este modelo precisa de sofrer algumas alterações para se adaptar à não linearidade do campo de deformações. Neste contexto, Schlaich (Schlaich, Schäfer, & Jennewein, 1987) desenvolveu um guia prático de conceção de modelos de escoras e tirantes e Muttoni (Muttoni, Schwartz, & Thürlimann, 1996) apresenta um livro pedagógico que demonstra a consistência e importância dos modelos de campos de tensões em zonas B e D, baseando-se nos estudos já efetuados por Thürlimann (1985).



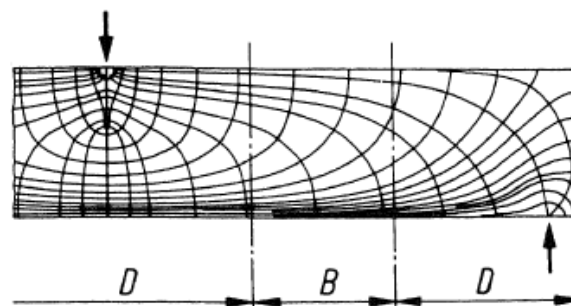
## 2.2. Definição de Zonas D

As zonas D podem existir devido a descontinuidades geométricas, como é o caso de zonas com variações de altura, ou a descontinuidades estáticas, como o caso de cargas concentradas e onde se insere o caso estudo desta dissertação, ou devido a ambas as descontinuidades, geométricas e estáticas, como representado na figura 2.

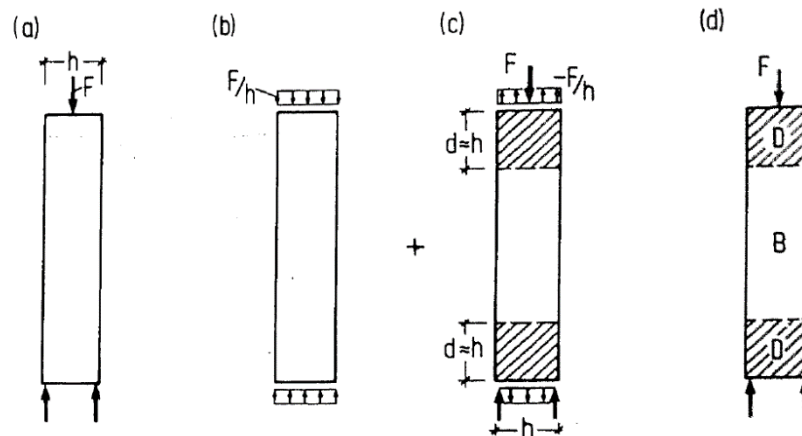


**Figura 2** - Zonas D com andamentos não lineares devido a: a) descontinuidades geométricas; b) descontinuidades estáticas e/ou geométricas. (Adaptado de Toward a Consistent Design of Structural Concrete, 1987)

Estruturas sem muitos elementos estruturais correntes é habitual coexistirem zonas B e D (Figura 3). Schlaich, Schäfer, Jennewein, (1987) consideram que a atribuição de uma fronteira entre estas zonas é apenas uma ajuda qualitativa para a execução de modelos de análise, nomeadamente modelos de escoras e tirantes. No entanto, apresentam um processo de definição da fronteira entre zonas B e D com base no já conhecido princípio de Saint-Venant (Figura 4).



**Figura 3** - Campo de tensões nas zonas B e D de uma viga (adaptado de Toward a Consistent Design of Structural Concrete, 1987).



**Figura 4** - Definição de zonas B e D (Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987)

O processo de definição de uma fronteira entre zonas B e D numa estrutura descontínua passa por, inicialmente, substituir a estrutura (a) por uma estrutura fictícia que satisfaça a hipótese de Bernoulli e o equilíbrio, mas que pode não satisfazer as condições de fronteira iniciais (b). De seguida cria-se um sistema em equilíbrio (c) que sobreposto ao sistema (b) seja equivalente à estrutura inicial (a). Por último, e aplicando o princípio de Saint-Venant, chega-se à distância  $d$ , a partir do qual se pode considerar as hipóteses de Bernoulli, ou seja, a fronteira entre a zona B e D.

### 2.3. Dimensionamento de Zonas D

Como primeiro passo no dimensionamento de zonas D, Schlaich et. al (1987) sugerem efetuar uma análise da estrutura na generalidade, isto é, definir as zonas B e D existentes através do mencionado princípio de Saint Venant. Desta forma, caso a estrutura seja constituída maioritariamente por zonas B, pode ser representada pelo seu sistema estático e a utilização de métodos de dimensionamento de zonas D é dispensável, sendo usados os já conhecidos métodos para situações correntes. Esta análise geral não só permite perceber a necessidade de se recorrer aos métodos de dimensionamento de zonas descontínuas como também nos permite obter as forças que estão nas fronteiras entre as zonas B e D.

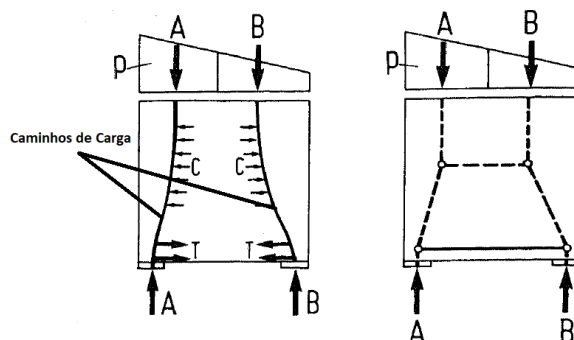
### 2.4. Modelo de Escoras e Tirantes (MET)

O MET é o modelo mais recorrente para o dimensionamento de zonas de descontinuidade e um dos métodos mais usuais na sua elaboração é o método do caminho de carga. O modelo (MET) consiste na representação dos campos de tensões resultantes por escoras, caso seja um campo de compressões, ou tirantes, se se tratar de um campo de trações, e na sua concentração em nós. São de seguida calculadas as forças nas escoras ou tirantes e dimensionadas as armaduras.

#### 2.4.1. Método do Caminho de Carga

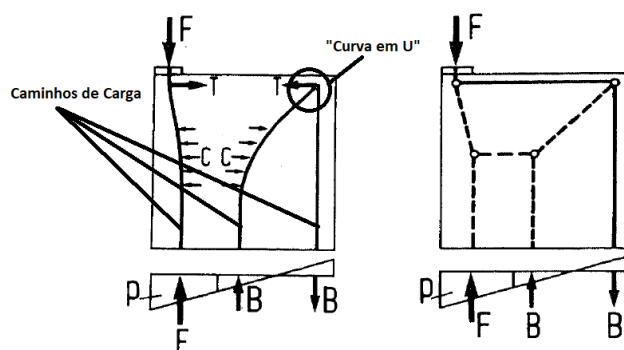
O método sugerido por Schlaich et. al (1987) para a elaboração de MET é o método do caminho de carga. Depois de calculadas as reações de apoio, na subdivisão da estrutura em zonas B e D, e

assumindo diagramas de tensões lineares ou constantes nas fronteiras, cria-se os caminhos de carga a partir do centro de gravidade dos diagramas, conectando-os ao lado oposto da estrutura, pelo caminho mais curto. É importante salientar que os caminhos de carga não se devem cruzar. Tendo o caminho de carga bem definido são calculados os elementos constituintes do MET, isto é, as escoras, tirantes e nós. Nas zonas onde há variações na direção dos caminhos de carga resultarão compressões ou trações (Figura 5).



**Figura 5** - Aplicação dos caminhos de carga (à esquerda) e respetivo MET (à direita)  
(Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987)

Nos casos em que haja momentos fletores importantes na fronteira da zona D pode haver uma inversão do caminho de carga, efetuando uma “curva em U”, tal como se pode observar na Figura 6. Este pormenor foi apresentado por Schlaich et. al (1987).

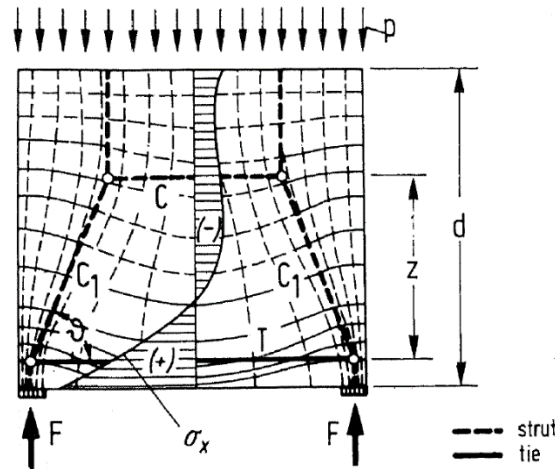


**Figura 6** - Aplicação dos caminhos de carga em estruturas com momento fletor (à esquerda) e respetivo MET (à direita). (Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987)

Este método funciona como um guia prático de conceção dos modelos mas é de salientar que as escoras e os tirantes devem estar posicionados no centro de gravidade dos diagramas de compressão e tração, respetivamente, resultantes do equilíbrio exterior à zona em análise.

Schlaich et al. (1987) refere também que caso se oriente as principais trações e compressões de acordo com as trajetórias elásticas de tensões, não será necessário explorar significativamente a ductilidade e fica indiretamente verificado o comportamento em serviço. Esta avaliação tem por base o facto de quando a estrutura está na eminência de fendilhar, apresenta uma distribuição de tensões elásticas, pelo que caso se adotem armaduras com base nessas resultantes de tensões, será adequadamente controlada a fendilhação para as cargas de serviço e não será necessário explorar

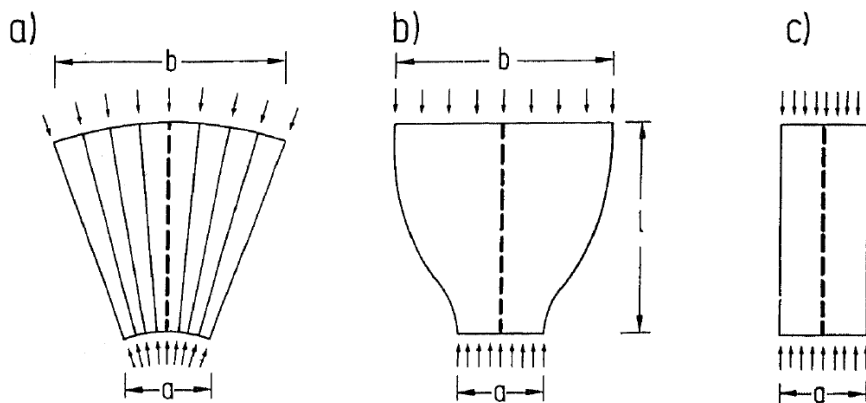
muito a ductilidade e a redistribuição de tensões, pois a distribuição de armaduras seguiu as distribuições de tensões antes de fendilhar (ver Figura 7).



**Figura 7** - Trajetória elástica do campo de tensões. (Adaptado de Schlaich, Schäfer, Jennewein, 1987)

### 2.4.2. Dimensionamento das Escoras

As escoras representam a resultante de um campo de compressões que são inteiramente suportadas pelo betão. Usualmente as escoras são consideradas lineares e as variações de direção ocorrem nos nós. São consideradas três configurações típicas (Figura 8): “prismática”, também considerada nas zonas B, campos com formato em “garrafa” ou em “leque”, nomenclatura atribuída por Schlaich et. al (1987).



**Figura 8** - Campos de compressão considerados (a) "Leque" (b) "Garrafa" (c) Prismático (Adaptado de Schlaich, Schäfer, Jennewein, 1987)

A resistência das escoras é influenciada pela resistência do betão. No entanto podem ser considerados valores superiores á capacidade resistente do betão em escoras com compressões multi-axiais ou inferiores caso estejam na presença de extensões transversais de tração. Esta redução é explicada detalhadamente na *FIP- Pratical Design of Structural Concrete 1990*.

O dimensionamento das escoras é apresentado no EC2 parte 1-1 no capítulo 6.5.2. e a expressão para o cálculo da tensão de compressão resistente de uma escora em zonas com ou sem tensões de compressão transversais é dada por:

$$\sigma_{Rd,m\acute{a}x} = f_{cd} \quad (1)$$

Como foi referido este valor pode sofrer uma redução e segundo o EC2, caso não haja uma abordagem rigorosa, nas zonas fendilhadas ou com trações transversais a tensão máxima pode ser calculada por:

$$\sigma_{Rd,m\acute{a}x} = 0.6v' f_{cd} \quad (2)$$

$$v' = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (3)$$

### 2.4.3. Dimensionamento dos Tirantes

Como já foi anteriormente mencionado, os tirantes são responsáveis por equilibrar as trações que ocorrem no modelo. O cálculo da armadura é feito da forma convencional, isto é, multiplicando a área de armadura a colocar,  $A_s$ , pelo valor da tensão de cedência do aço a considerar,  $f_{yd}$ , e garantir que é superior ao valor da tração que surge no modelo. É de salientar que o eixo das armaduras a colocar deve estar coincidente com o eixo do tirante calculado no MET.

### 2.4.4. Dimensionamento dos Nós

Os nós são os elementos do modelo que unem as escoras e os tirantes e estão colocados em zonas onde o campo de tensões sofre alterações na sua direção. Nem todos os nós necessitam de ser devidamente analisados, apenas os nós *singulares*, ou *concentrados*, onde ocorrem tensões de compressão elevadas associadas a tensões de aderência para a amarração das armaduras. Existem essencialmente três tipos de nós dependendo da combinação de escoras, ou compressões (C), e tirantes, ou trações (T):

- Nós CCC;
- Nós CCT;
- Nós CTT;

A nomenclatura assenta no mesmo princípio caso existam mais do que três escoras ou tirantes. O dimensionamento de cada um dos tipos será sumarizado mais adiante e os requisitos a cumprir, são, em geral, a amarração das armaduras e a garantia de que a tensão de compressão máxima não excede a resistente efetiva em cada nó. Foram efetuadas e sugeridas diversas metodologias de dimensionamento mais detalhados, por exemplo por parte de Schlaich e Schäfer (Schlaich & Schäfer, Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models, 1991) ou apresentados na FIP (FIP, 1999) mas, por simplificação, nesta dissertação serão principalmente consideradas as recomendações do EC2.

### Nós CCC:

Os nós CCC, tal como a nomenclatura indica, são pontos de união das escoras e concentram apenas compressões. Para o seu dimensionamento, são criadas superfícies ortogonais às escoras concorrentes nos nós, e definidos os valores das tensões de compressões das escoras,  $\sigma_{Ed,1}$ ,  $\sigma_{Ed,2}$ ,  $\sigma_{Ed,3}$  e  $\sigma_{Ec,0}$  na Figura 9, resultantes da divisão da força associada à escora pela largura das superfícies definidas pela geometria do nó. O valor destas tensões deve respeitar o valor máximo estabelecido no EC2 1-1 e definido por:

$$\sigma_{Rd,m\acute{a}x} = k_1 v' f_{cd} \quad (4)$$

O valor de  $k_1$  está indicado no Anexo Nacional de cada país, sendo que o valor recomendado pelo EC2 1-1 é  $k_1 = 1$ , e  $v'$  pode ser calculado pela equação (3).

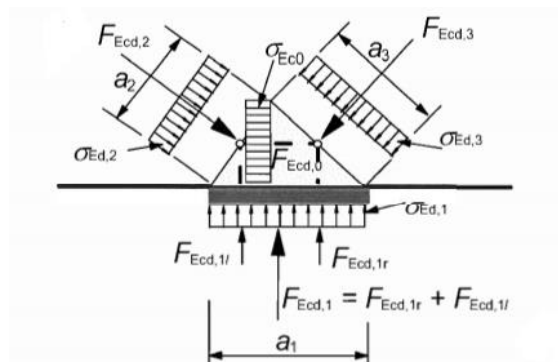


Figura 9 - Dimensionamento de nós CCC. (Adaptado de EC 2 1-1)

### Nós CCT:

Os nós CCT inserem um novo requisito, que se trata da amarração das armaduras na zona do nó. Ou seja, para além da verificação da tensão máxima de compressão no nó, é importante que esta amarração seja garantida de forma adequada.

O valor máximo de compressão indicado pelo EC2 1-1 é:

$$\sigma_{Rd,m\acute{a}x} = k_2 v' f_{cd} \quad (5)$$

O valor de  $k_2$  encontra-se no Anexo Nacional de cada país sendo recomendado pelo EC2  $k_2 = 0.85$ .

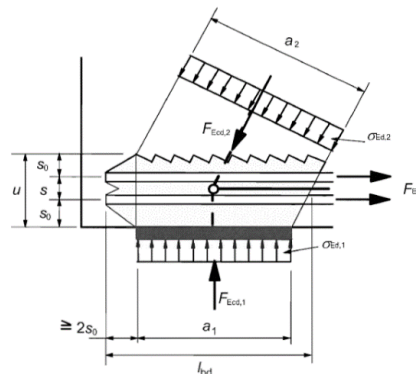


Figura 10 - Dimensionamento de nós CCT (Adaptado de EC 2 1-1)

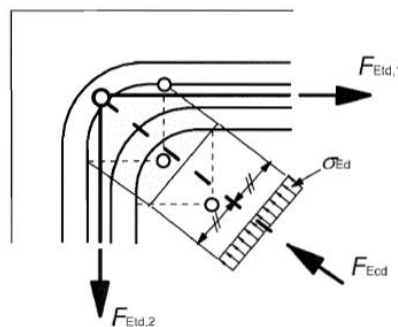
A metodologia de cálculo das compressões máximas é semelhante à utilizada no cálculo de nós CCC (Figura 10) e o comprimento de amarração pode ser determinado de acordo com as regras correntes.

### Nós CTT:

Os nós CTT surgem quando o equilíbrio do nó é assegurado por apenas uma escora entre outros tirantes. Tal como nos nós CCT deve haver um especial cuidado com as amarrações dos varões. O valor máximo recomendado pelo EC2 1-1 para a tensão de compressão nodal é:

$$\sigma_{Rd,m\acute{a}x} = k_3 v' f_{cd} \quad (6)$$

O valor associado a  $k_3$  está indicado no Anexo Nacional de cada país sendo, no entanto, recomendado pelo EC2 um valor de  $k_3 = 0.75$ . Os raios de dobragem, no caso de existir armaduras curvas devem seguir o estipulado no regulamento, sendo boa prática garantir que toda a amarração do varão ocorre na zona curva. No caso de existir nós CTT com armaduras retas, deverá garantir-se que a amarração dos varões ocorre por detrás da última armadura tracionada na direção perpendicular (Figura 11).



**Figura 11** - Dimensionamento de nós CTT  
(Adaptado de EC 2 1-1)

Em todos os nós previamente descritos o EC2 recomenda um aumento em 10% do valor da resistência à compressão nos nós,  $\sigma_{Rd,m\acute{a}x}$  se se verificar alguma das seguintes situações:

- Existência de compressões triaxiais;
- Todos os ângulos entre as escoras e os tirantes são  $\geq 55^\circ$ ;
- As tensões aplicadas nos apoios ou nos pontos de aplicação da carga são uniformes, e o nó está confinado por estribos;
- A disposição de armadura é feita em mais do que uma camada;
- O nó está confinado de forma fiável por atrito ou por uma disposição particular no apoio.

Relativamente às amarrações das armaduras nos nós, o EC2 refere que devem iniciar no início do nó e o comprimento de amarração deve ser estendido a todo o comprimento do nó.

## 2.5. Técnicas de seleção de MET

Para a mesma estrutura podem ser concebidos diversos MET e a principal dúvida assenta em qual se apresenta mais próximo do ideal. Existem diversos autores e diversas abordagens para esta seleção, desde as mais qualitativas e com regras de bom senso, a outras mais quantitativas e baseadas em otimização e modelação numérica.

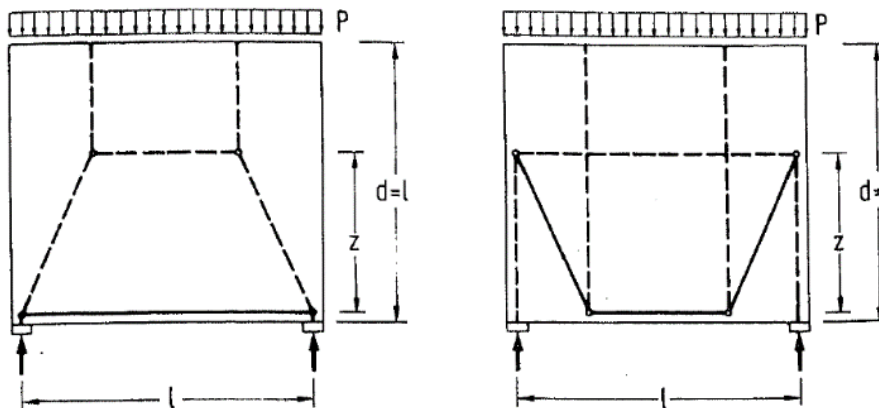
Schaich et. al (1987) defendem que a carga tende a escolher o caminho com menor deformação, e visto que as armaduras apresentam maior capacidade de deformação, o melhor modelo será o que tiver menor quantidade de tirantes. Esta regra simplificada de otimização pode ser traduzida por:

$$\text{Min} (\sum F_i l_i \epsilon_{mi}) \quad (7)$$

Onde:

- $F_i$  corresponde à força aplicada na escora ou tirante  $i$ ;
- $l_i$  corresponde ao comprimento do membro  $i$
- $\epsilon_{mi}$  corresponde à deformação do membro  $i$ ;

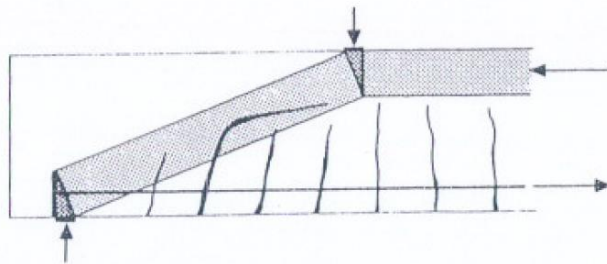
Na figura seguinte, figura 12, são apresentados dois modelos diferentes para a mesma estrutura avaliados com base no critério acima mencionado.



**Figura 12** – MET bem efetuado com base no critério de menor deformação (à esquerda) e MET mal efetuado com base no mesmo critério (Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein, 1987)

Outras possíveis maneiras de selecionar um determinado modelo de análise foram estudadas por diversos autores. A título de exemplo Muttoni et al (1988) sugeriu, como regra de seleção, que o modelo de escoras e tirantes fosse guiado com base numa avaliação qualitativa da deformação da região, como ilustrado na figura 13. Pode acontecer, devido a ações ou carregamentos prévios na estrutura, ou até estados de tensões residuais (temperatura, assentamentos, etc...), haver abertura de fendas em zonas de desenvolvimento de escoras, impedindo a transmissão de cargas. Assim sendo, o dimensionamento deve ser feito de modo a evitar grandes aberturas de fendas, principalmente em zonas onde existam campos de compressões.

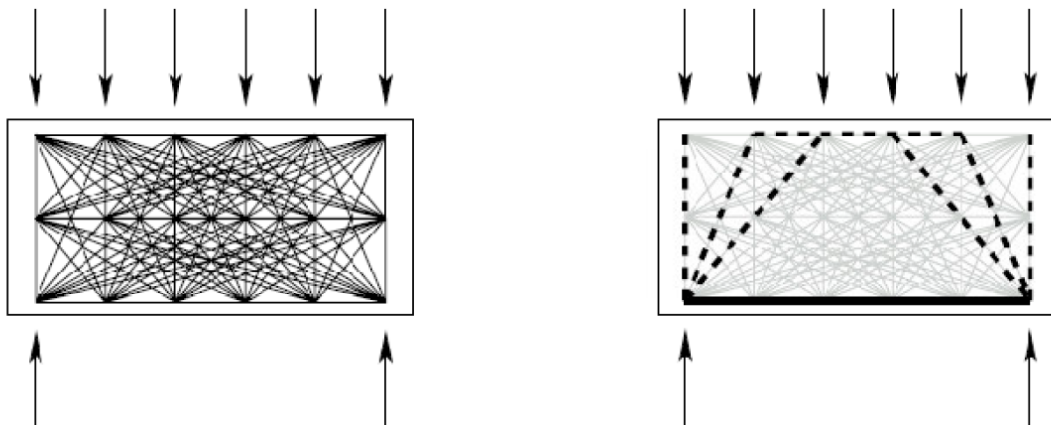




**Figura 13** - Abertura de fenda num campo de compressões. (Adaptado de Muttoni et. al, 1996)

O MET, como já foi visto acima, apresenta uma infinidade de possíveis soluções para a mesma estrutura, sendo um dos critérios de otimização o número de tirantes ou a abertura de fendas. No entanto quanto mais complexa for a estrutura, mais complicada se torna a otimização e seleção do melhor modelo.

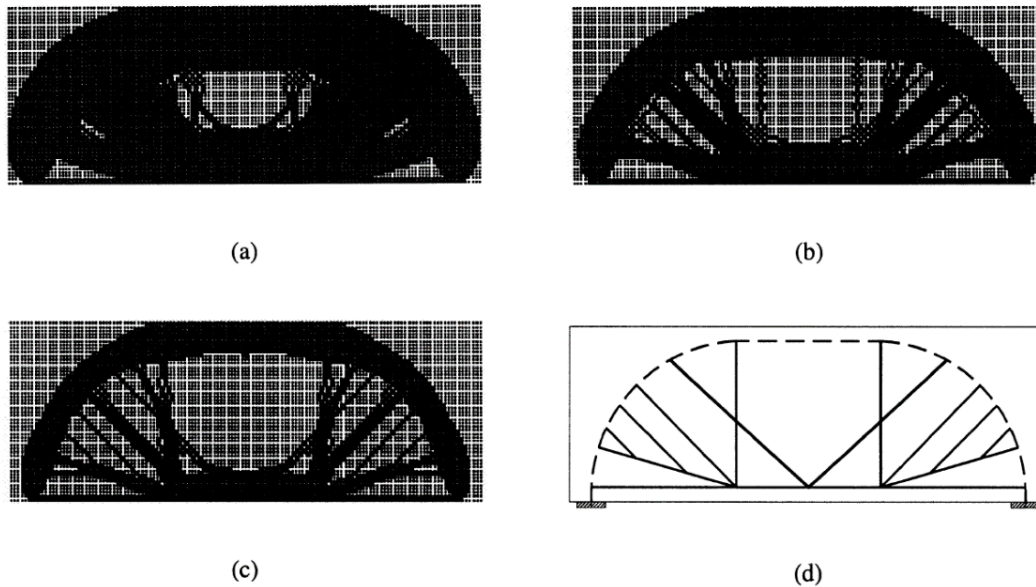
Neste sentido vários investigadores trabalharam no desenvolvimento de ferramentas que ajudassem na produção automática de modelos de escoras e tirantes que desempenhassem um comportamento adequado. Bendsoe (Bendsoe & Sigmund, 1995) foi um dos investigadores e pioneiros do método que consiste em gerar uma malha de possíveis caminhos de carga, gerando um sistema equilibrado hiperestático. Neste sistema a contribuição de alguns elementos para a transmissão de carga é pouco importante, visto que apresentam uma eficiência reduzida. Estes elementos são removidos sucessivamente até se obter um MET eficiente. Na figura 14 (a) podemos observar a malha de possíveis encaminhamentos de carga e a respetiva otimização na figura 14 (b).



**Figura 14** - (a) Malha de possíveis encaminhamentos de carga e (b) respetiva otimização. (Adaptado de Ruiz e Muttoni, 2007)

Dando continuidade a esta ideia, Liang (Liang, Xie, Steven, & P., 2000) apresenta um processo iterativo de redução da quantidade de elementos removendo sistematicamente os elementos com reduzida contribuição na transmissão de carga. A cada iteração é calculada a energia associada a cada elemento e removido o elemento com a menor participação energética. A qualidade do modelo é avaliada através de um índice de performance antes de seguir para a próxima iteração. Quando o índice de performance for aceitável está encontrado o modelo a utilizar. Na figura 15 estão representadas as iterações 20 (a) e 40 (b) da otimização do campo de tensões de uma viga parede sujeita a um

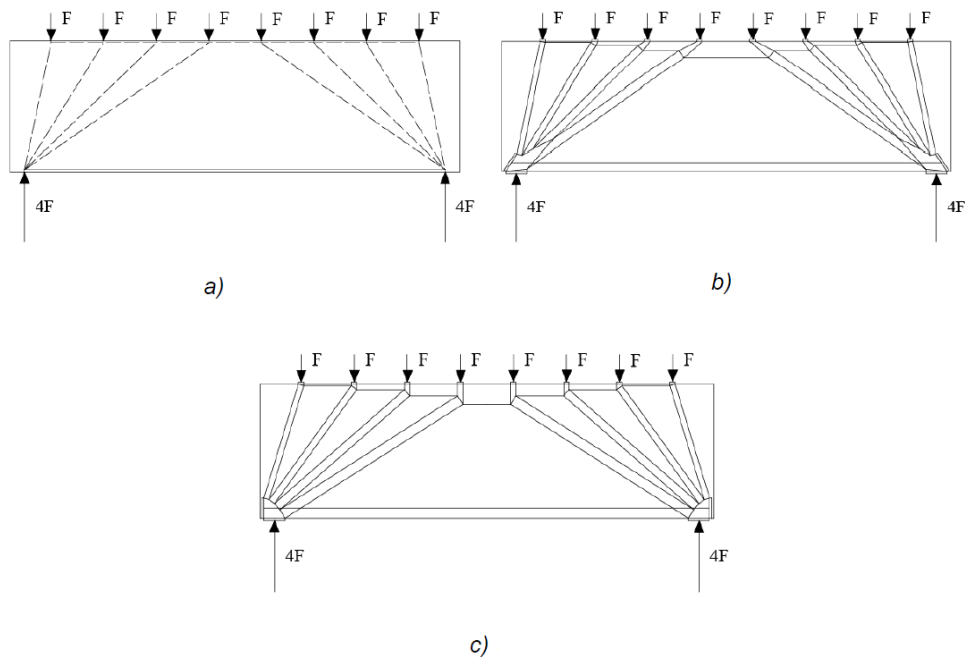
carregamento na zona inferior. Está também representada a solução obtida (Figura 15 (c)) e o respetivo MET (Figura 15 (d)).



**Figura 15** - Processo de seleção do campo de tensões de uma viga parede carregada na zona inferior na sua (a) iteração 20, (b) iteração 40, (c) a solução final e (d) o MET adotado. (Adaptado de Liang et al, 2000)

Também Kostic (Kostic, 2006) efetuou estudos com base na teoria desenvolvida por Bendsoe (1995), otimizando o método de seleção e remoção dos elementos com menor contribuição na transmissão de carga na estrutura. Para além disso desenvolveu um processo iterativo de otimização da geometria do MET escolhido, de modo a tornar os campos de tensões nos nós perpendiculares às fronteiras do mesmo. Dessa forma torna-se desnecessário efetuar verificações adicionais à resistência do nó, o que aconteceria caso o campo de tensões não fosse perpendicular às fronteiras dos nós. Esta dedução foi efetuada por Kupfer (1964) que demonstrou que a resistência do betão sujeito a compressão bi-axial é superior ao seu  $f_{cd}$ .

Na figura 16 está representado o (a) modelo utilizado e as diferentes otimizações geométricas obtidas ((b) e (c)), gerando campos de compressões perpendiculares às fronteiras dos nós.

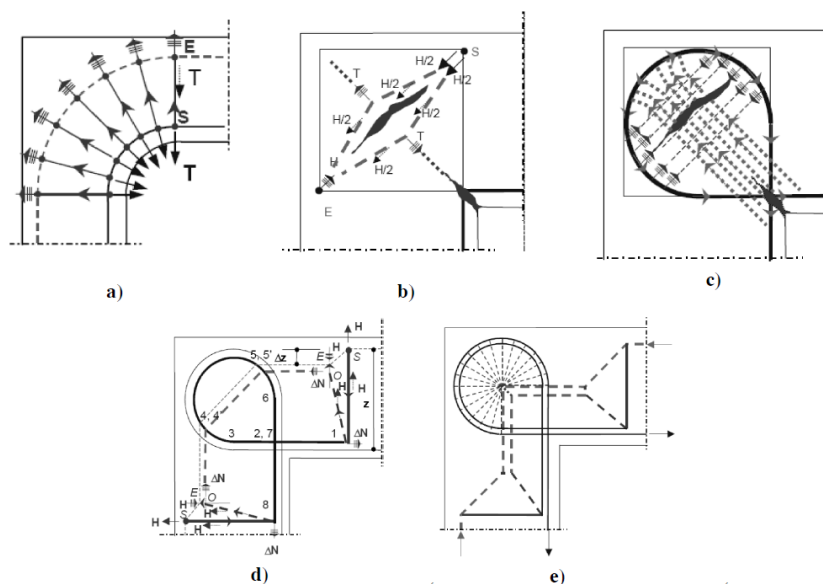


**Figura 16** - (a) MET obtido (b) MET antes da otimização geométrica (c) MET depois da otimização geométrica. (Adaptado de Kostic, 2006)

Outro investigador responsável pelo desenvolvimento de um método de seleção do melhor MET foi Vitone (Vitone, Palmisano, & Vitone, 2006). Apresentou um mecanismo de avaliação do comportamento da estrutura e do respetivo MET em diversas fases do carregamento. Neste mecanismo é possível estimar a reação da estrutura à formação da primeira fenda, a evolução do MET durante a formação de mais fendas, e ainda avaliar o MET no ELU. Para a execução deste mecanismo, Vitone et. al sugeriu oito etapas:

1. Adoção de um modelo: recorrendo ao MET e às respetivas regras de dimensionamento é possível obter a geometria e características dos elementos.
2. Evolução do estado da estrutura: definição dos estados da estrutura, isto é, não tensionada, não fendilhada, formação da primeira fenda, formação de mais fendas e estado limite de serviço.
3. Análise à transformação física da estrutura: transformações físicas associadas aos diversos estados enunciados na fase anterior.
4. Interpretação energética: adaptação dos caminhos de carga às transformações físicas ocorridas na estrutura, procurando sempre gastar o mínimo possível de energia.
5. Comportamento estrutural em cada transformação: capacidade da estrutura em se adaptar às variações dos caminhos de carga. Nesta fase como critério de avaliação é aconselhada a quantificação da energia a dissipar na adaptação da estrutura aos novos caminhos de carga.
6. Comportamento da estrutura em serviço: análise à resposta da estrutura no seu ELS.
7. Criação de modelos capazes de simular o comportamento dos diversos estados da estrutura.
8. Comparação entre os modelos e os padrões de fendas estimados na estrutura.

Através deste mecanismo é possível analisar empiricamente a resposta da estrutura ao carregamento nos seus diversos estados e, desta forma, obter o melhor MET que se adapte aos diversos estados. Na mesma publicação os autores apresentam como exemplo o dimensionamento de um canto explicando as adaptações do modelo em cada fase de uma forma detalhada. Na figura 17 é ilustrado este exemplo estando representado em (a) o MET inicialmente escolhido, (b) e (c) a formação de fendas para duas disposições diferentes da armadura, (d) MET para a estrutura fendilhada e (e) o MET para o ELS.

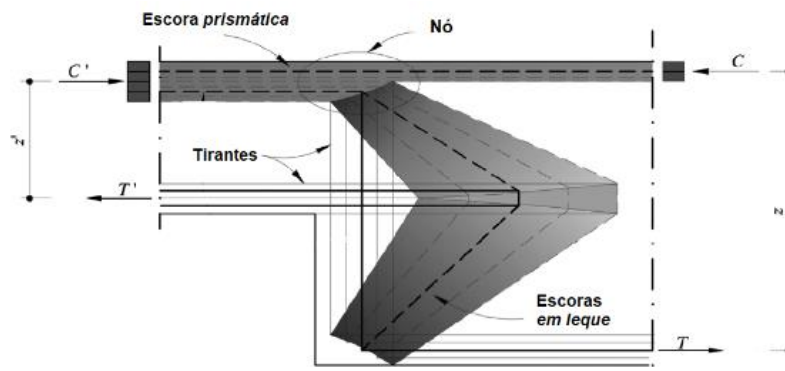


**Figura 17** - MET para (a) o estado não tensionado, formação de fendas para (b) uma disposição ortogonal de armaduras e (c) uma disposição circular de armaduras e MET para (d) estado fendilhado e (e) ELS (Adaptado de Vitone et. al, 2006)

Uma dificuldade associada a algumas metodologias desenvolvidas é o facto de não se considerar a continuidade do betão, tornando difícil definir a secção a considerar nos campos de compressão. Neste sentido, Fernández e Muttoni (Ruiz & Muttoni, 2007) desenvolveram a geração automática de campos de tensões em estruturas de betão com recurso a elementos finitos. Com a utilização dos elementos finitos esta dificuldade é ultrapassada e é ainda possível obter campos de tensões considerando a compatibilidade. É com base neste método que serão efetuados os modelos a ensaiar numa fase posterior desta dissertação.

Outro conceito desenvolvido foi o Modelo de Campos de Tensões Adaptativos (MCTA), nome atribuído pelos autores da investigação, Lourenço e Almeida (2010). Este conceito tem como principal essência a adaptação do modelo, através de princípios de energia mínima, a cada passo de carga. Num documento onde são explicadas detalhadamente as regras associadas ao MCTA, são validados resultados numéricos baseados no mesmo, comparando com ensaios experimentais realizados por Leonhardt e Walther em 1966.

O MCTA é uma ferramenta de análise não linear, totalmente baseada nos campos de tensões, onde os diversos elementos têm um significado físico específico. O modelo é constituído por três elementos: tirantes, escoras *prismáticas* e escoras *em leque* como se pode ver na figura seguinte:



**Figura 18** - Esquema representativo dos elementos presentes no MCTA. (Adaptado de Lourenço e Almeida, 2010)

Sabendo a largura dos campos de tensões é possível introduzir as relações constitutivas do betão e do aço e a compatibilidade no problema, no entanto, adiciona-se a possibilidade de o modelo poder ser adaptado (i.e. mudar a sua geometria) ao longo do processo de carregamento. A cada passo de carga a redistribuição dos campos segue o conceito de “*form follows energy*”, ou seja a configuração do modelo é determinado com base no princípio da energia mínima, de modo a simular adequadamente as redistribuições de tensões. O MCTA minimiza a energia a cada passo de carga adaptando-se e satisfazendo sempre as condições de equilíbrio e compatibilidade, tendo como variáveis os ângulos das resultantes ou a posição dos nós.

Através do conceito do MCTA, Lourenço e Almeida (2013), apresentam diversas avaliações aos modelos de escoras e tirantes de várias regiões típicas. Nas análises efetuadas pelos autores são avaliados diversos modelos que assumem redistribuições importantes em relação ao modelo de referência, que usualmente é o modelo baseado na distribuição elástica de tensões. É efetuada uma análise do comportamento em serviço e ao estado limite último de cada modelo, de modo a estabelecer os limites máximos de afastamento em relação à solução de referência que garanta um adequado comportamento da região em estudo.

Para avaliar o comportamento dos MET das vigas parede contínuas, os autores recorreram à conceção de modelos para uma viga parede contínua com dois tramos. Dando uso à já mencionada liberdade de conceção de MET para esta tipologia estrutural, os autores desenvolveram, para além do modelo baseado na trajetória elástica, modelos onde mantiveram o braço associado ao modelo elástico, variando a quantidade de armadura no apoio e a meio vão. Para além destes desenvolveram ainda modelos onde foi igualado o braço a meio vão e no apoio.

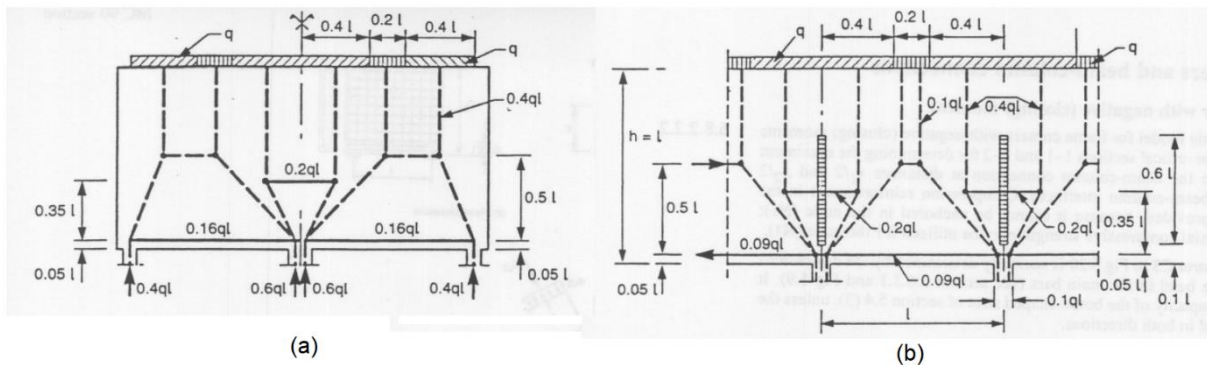
Os autores concluíram que a carga de dimensionamento foi atingida para todos os modelos, o que denota alguma ductilidade por parte da estrutura. Concluíram também que depois da fendilhação do betão na zona inferior do apoio, há um aumento nas tensões das armaduras a meio do apoio e na sua zona superior. Para um comportamento adequado em serviço os autores concluem que não é aconselhável recorrer a um aumento de 50% do braço nos apoios. No entanto, essa redistribuição possível implica que o projetista tem alguma liberdade no que diz respeito à escolha do melhor MET a utilizar

## 2.6. MET para Vigas Parede Contínuas

### 2.6.1. Modelo baseado nas tensões elásticas

Na figura 19 estão representados os MET a adotar, para uma viga parede uniformemente carregada no topo, seguindo as trajetórias elásticas de acordo com o documento da *FIP – Practical Design of structural concrete*, 1999.

É de reparar na figura 19 (a) que as reações estão condizentes com aquilo que é usual no dimensionamento elástico de uma viga contínua, havendo uma repartição de carga de cerca de  $0.6ql$  e  $0.4ql$ , para os apoios intermédio e de extremidade respetivamente, estando  $q$  associado ao valor da carga distribuída e  $l$  ao vão da viga. É evidente a semelhança ao dimensionamento de uma viga usual, com as existências de um reforço na armadura inferior a meio vão e uma armadura superior no apoio. Os valores de  $0.35l$  e  $0.5l$  resultam da resultante das trajetórias elásticas. Na mesma figura 19 podemos observar um MET para (a) viga parede contínua com dois tramos e (b) tramo intermédio de uma viga parede contínua.

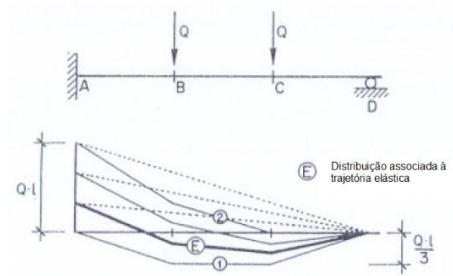


**Figura 19** - MET para (a) viga contínua com dois tramos e (b) tramo intermédio de uma viga contínua. (Adaptado de *FIP- Practical design of structural concrete*, 1999)

É um modelo semelhante a este que será tomado como base de dimensionamento para os modelos que estão calculados e explicados em detalhe no capítulo 3, mais adiante nesta dissertação.

### 2.6.2. Vigas Contínuas como estruturas estaticamente indeterminadas

As vigas parede contínuas são estruturas estaticamente indeterminadas, e por isso existe mais do que uma distribuição interna de esforços que garanta o equilíbrio das mesmas. A figura 20 ilustra exatamente essa ideia, representando uma viga com possíveis distribuições de momentos, todos eles equilibrados, assimilando o comportamento da viga ao comportamento de uma viga simplesmente apoiada (distribuição 1) ou ao de uma consola (distribuição 2). No entanto, a conceção de MET com base em algumas destas distribuições poderá não ter um comportamento adequado em serviço. Teoricamente a estas distribuições 1 e 2, que representam situações limite, estará associado o desenvolvimento de fendas expressivas no apoio esquerdo e a meio vão respetivamente para as ações em serviço.



**Figura 20** - Distribuições de momentos estaticamente admissíveis. (Adaptado de Muttoni et. al, 1996)

As reações de apoio estão diretamente relacionadas com o MET a utilizar, e também com as distribuições de momentos representadas na figura 20. Neste sentido, a variação de reações exteriores das vigas está diretamente relacionada com a distribuição de momentos internos nas vigas, que no caso das vigas paredes corresponde a distribuição de tensões internas.

# 3. Seleção e avaliação de Modelos de Campos de Tensão através de Elementos Finitos

## 3.1. Modelação com Elementos Finitos

Como referido no capítulo anterior, Fernández e Muttoni (2007) desenvolveram uma análise numérica não linear através do método dos elementos finitos com o intuito de analisar modelos de campos de tensões em elementos de betão estrutural. Com este método, é possível ter um modelo contínuo de tensões e ter em consideração a compatibilidade e, conseqüentemente, o comportamento em serviço, algo que não é possível efetuar com o MET pois trata-se de um modelo de equilíbrio.

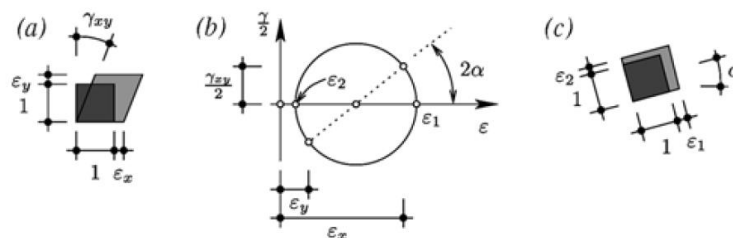
Esta análise não linear desenvolvida pelos autores acima mencionados, ao contrário de outras mais complexas, necessita de um número limitado de parâmetros físicos. É considerado o comportamento elasto-plástico dos materiais, sendo que o betão não resiste à tração, não existe atrito entre agregados e as armaduras apenas têm esforços axiais. Os resultados são apresentados em forma de campos de tensões, i.e. são apresentadas as tensões principais no betão e as forças ou tensões nas armaduras.

Nesta dissertação, foi utilizado o programa desenvolvido por Miguel Ferreira, EvalS (Ferreira, Lourenço, & Almeida, 2017) que utiliza elementos finitos triangulares para simular o betão e elementos lineares para as armaduras e a análise incremental é resolvida recorrendo ao processo iterativo de Newton-Raphson.

### 3.1.1. Modelação do Betão

O betão é modelado assumindo que as direções principais de tensão são paralelas às direções principais de deformação. Estas relações estão representadas na figura 21. Assim sendo, dado o campo de deformações, é possível obter o campo de tensões, estando diretamente relacionadas:

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (8)$$



**Figura 21** - (a) Deformações do elemento de betão; (b) Círculo de Mohr de deformações; (c) Direções de deformação principais. (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007)

Relativamente às suas relações constitutivas, considera-se desprezável a resistência à tração. À compressão o betão apresenta um comportamento elástico-plástico, isto é, até atingir a sua capacidade limite de resistência à compressão, tem um comportamento elástico e, como declive, o seu



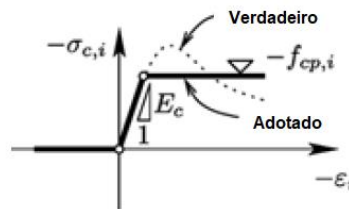
módulo de elasticidade  $E_c$  (o valor é considerado independente da deformação transversal, proposto por Vecchio e Collins, (1986)). O gráfico representativo da relação constitutiva do betão estrutural está ilustrado na figura 22.

Excedida a resistência à compressão do betão o seu comportamento é perfeitamente plástico. A resistência à compressão do betão é dada por:

$$f_{cp} = 3.1(f'_c)^{\frac{2}{3}} \cdot \eta(\varepsilon_j) \quad (9)$$

Sendo  $f'_c$  a resistência à compressão proveniente do ensaio cilíndrico. São muitos os estudos existentes no sentido de modelar a influência da deformação transversal,  $\varepsilon_j$ , na resistência do betão. Muttoni e Fernández (2007) optam pela utilização da proposta de Hars (2006) atribuindo ao parâmetro  $\eta(\varepsilon_j)$  o valor de:

$$\eta(\varepsilon_j) = \frac{1}{0.9 + 30(f'_c)^{1/3} \varepsilon_j} \quad (10)$$

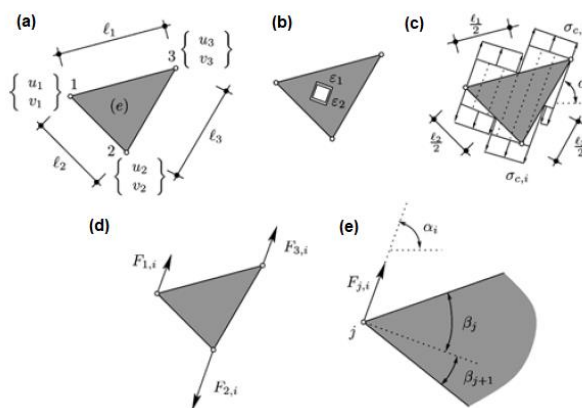


**Figura 22** - Relação tensão-deformação real e adotada para a modelação do betão. (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007)

A modelação do betão é feita através de elementos triangulares CST (“Constant Strain Triangle”). Estes elementos, como o nome diz, apresentam deformações constantes no seu domínio, obtidas através do seu campo de deslocamentos. As forças nodais podem ser obtidas através de:

$$F_{j,i} = \sigma_i \left( \frac{l_j}{2} \cos(\beta_j) - \frac{l_{j+1}}{2} \cos(\beta_{j+1}) \right) \quad (11)$$

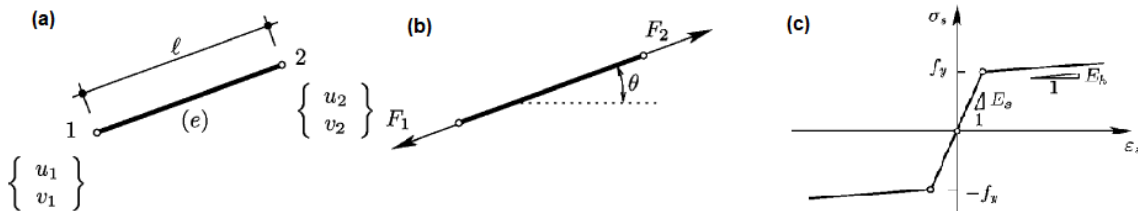
Sendo  $i \in (1,2)$  e  $j \in (1,2,3)$ . Os elementos CST estão representados na figura 23.



**Figura 23** - (a) campos e deslocamentos dos CST; (b) Campo de deformações dos CST; (c) Campo de tensões para a tensão principal  $i$ ; (d) Forças nodais; (e) Ângulo  $\beta$  em cada nó  $j$ . (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007)

### 3.1.2. Modelação do Aço

O aço é modelado considerando um comportamento numa direção apenas, representado na figura 24 (a) e (b). O gráfico de tensão deformação apresenta um comportamento bilinear, tal como representado na figura 24 (c). A resposta do aço é caracterizada pela sua tensão de cedência  $f_y$ , módulo de elasticidade  $E_c$  e o módulo de elasticidade pós cedência,  $E_h$ .

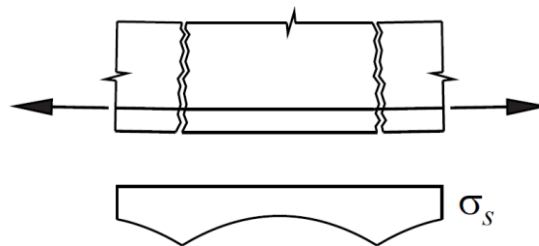


**Figura 24** - (a) Campo de deslocamentos do elemento de aço; (b) Forças nodais no elemento de aço; (c) Relação tensão-deformação do aço. (Adaptado de Muttoni e Fernández, 2007)

As forças nodais representadas na figura 26 (b) podem ser calculadas por:

$$F_{j,i} = \sigma_s \times A_{s,i} \quad (12)$$

Sendo  $A_{s,i}$  a área da secção do elemento modelado. Para além destas considerações, na modelação do aço é considerado um fenómeno chamado “*Tension Stiffening*”. É um fenómeno definido pelo aumento da rigidez do elemento de aço devido ao betão envolvente. Na secção da fenda a tensão é toda suportada pelo aço, já na zona sem fendas há uma distribuição das tensões entre o betão e o aço. Este fenómeno está ilustrado na figura 25.



**Figura 25** - “*Tension Stiffening*” no betão armado fendilhado. (Adaptado de Marti, 2013)

## 3.2. Análise de Vigas Parede Contínuas Uniformemente Carregadas no Topo Através de Elementos Finitos

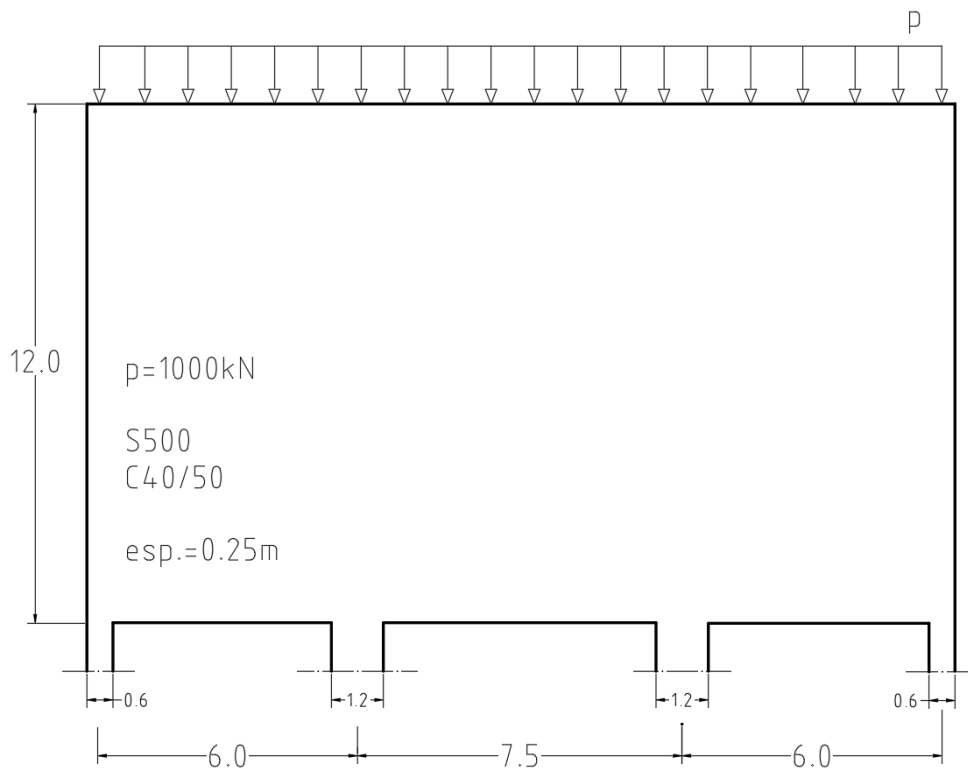
### 3.2.1. Geometria e Considerações Iniciais

Tal como introduzido no capítulo 2, as vigas parede são estruturas com zonas de descontinuidade e a avaliação do MET escolhido para o dimensionamento pode ser feito através do acima descrito método dos elementos finitos.

A viga parede em estudo tem três tramos, tendo como comprimentos de vão 6.0 m e 7.5 m, vãos de extremidade e intermédio, respetivamente. A adoção destes valores permite, na teoria, reduzir a influência do tramo de extremidade no tramo intermédio e foram obtidos igualando o valor elástico do momento no apoio intermédio:

$$l_1 = \sqrt{\frac{8}{12}} l_2 \quad (13)$$

Sendo  $l_1$  o comprimento do vão de extremidade e  $l_2$  o comprimento do vão intermédio. A altura total da viga é 12 m, dando margem para uma eventual subida do braço interno das forças, e a sua espessura 0.25 m. A viga está submetida a um carregamento uniformemente distribuído no topo de 1000kN/m. O betão a considerar na análise será o C40/50 e o aço A500. A figura 26 ilustra a geometria da viga parede a analisar.



**Figura 26** - Geometria da viga parede contínua a analisar. (Dimensões em metros)

Como modelo de referência é considerado o modelo associado às trajetórias elásticas da viga, modelo este já apresentado nesta dissertação (Figura 19). Partindo desse modelo, são alterados alguns parâmetros de forma a obter outros modelos de análise simulando diferentes níveis de redistribuição interna. Dando uso à liberdade na criação de modelos em equilíbrio nas vigas, a criação de modelos para esta análise pode ser dividida em duas categorias:

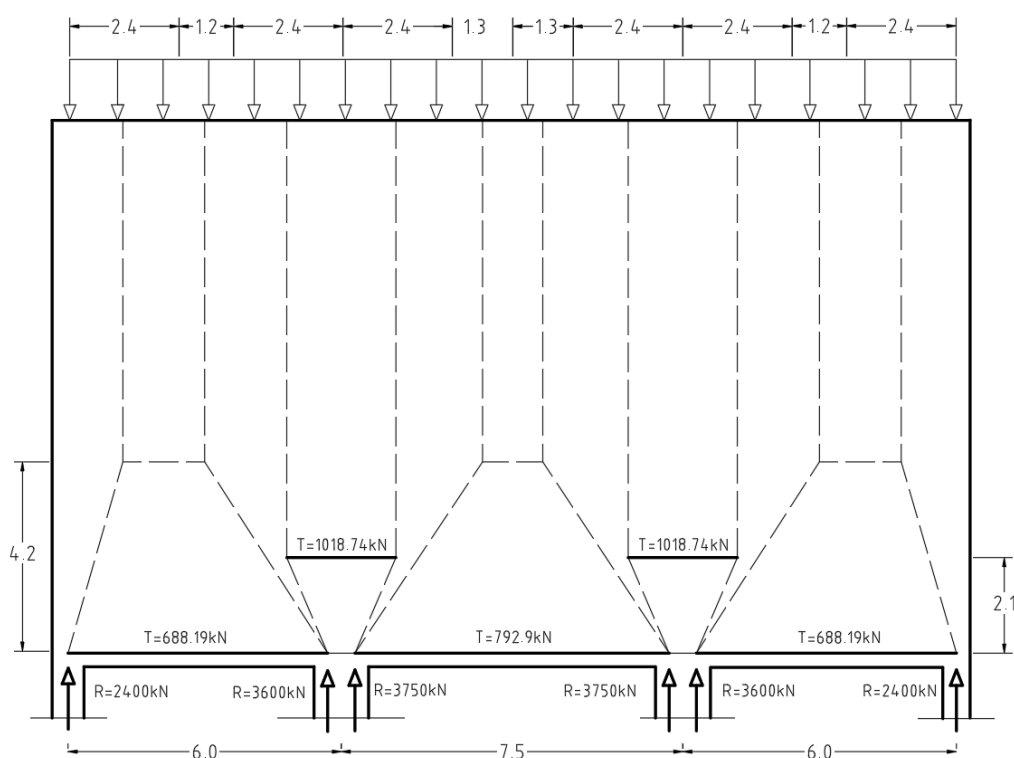
Na primeira categoria o parâmetro variável é o valor imposto da reação no apoio de extremidade da viga. Esta imposição resulta numa variação do valor da tração nas zonas inferior e

superior, do meio vão e apoio, respetivamente. Por consequência, a quantidade de armadura a colocar nestas zonas é também diferente, assim como a posição horizontal dos nós no MET.

Na segunda categoria, o parâmetro variável é o mesmo, o valor imposto da reação no apoio de extremidade, no entanto o braço considerado no apoio é igual ao braço a considerado a meio vão da viga. Em termos práticos, a distância entre a escora e o tirante é igual no apoio e a meio vão tomando o valor de  $0.7l$ , com  $l =$  vão da viga, ou seja 4.2m. Este último modelo é efetuado por facilita o cálculo do MET e, portanto, é útil na prática.

### 3.2.2. Dimensionamento e Modelação do Modelo de Referência

O modelo de referência está associado às trajetórias elásticas e, nesse sentido, tem como valores das reações 2400kN para os apoios de extremidade e 7350kN para os apoios intermédios (equivalente à soma dos 60% da carga aplicada no tramo de extremidade com os 50% da carga aplicada no tramo intermédio). O valor do braço a meio vão é  $0.7l$ , ou seja 4.2m, e no apoio é  $0.35l$ , ou seja 2.1m. Tendo estes dados, os valores associados às resultantes (escoras e tirantes) do modelo, são facilmente obtidos através de equilíbrio. Na figura 27 está representado o MET considerado para o modelo de referência.



**Figura 27** - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo de referência. (Dimensões em metros)

Os valores das trações e compressões, assim como os ângulos do MET, estão todos dependentes do valor da reação no apoio de extremidade, seguindo o método do caminho da carga.

Os cálculos da armadura a colocar o MET estão resumidos na Tabela 1. O cálculo da área de armadura (equações (16) e (19)) é efetuado dividindo a força no tirante pela resistência de cálculo do aço à tração,  $f_{yd} = 435\text{MPa}$ .

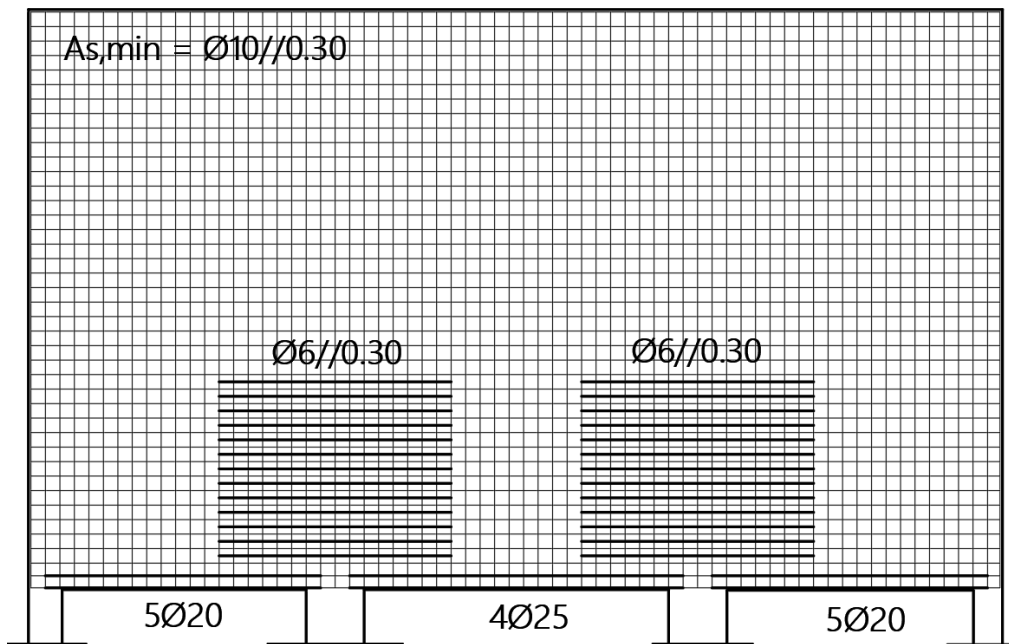
**Tabela 1 - Cálculo da armadura no MET do modelo de referência.**

<b>Nó no apoio de extremidade:</b>	
	<p><u>Equilíbrio no nó:</u></p> $C = \frac{2400\text{kN}}{\text{sen}(74^\circ)} = 2496.72\text{kN} \quad (14)$ $T = C \times \cos(74^\circ) = 688.19\text{kN} \quad (15)$ <p><u>Área de armadura:</u></p> $A_s \geq \frac{688.19\text{kN}}{43.5\text{kN/cm}^2} = 15.82\text{cm}^2 \quad (16)$
<b>Nó no apoio intermédio:</b>	
	<p><u>Equilíbrio no nó:</u></p> $C = \frac{2400\text{kN}}{\text{sen}(67^\circ)} = 2607.26\text{kN} \quad (17)$ $T = C \times \cos(67^\circ) = 1018.74\text{kN} \quad (18)$ <p><u>Área de armadura:</u></p> $A_s \geq \frac{1018.74\text{kN}}{43.5\text{kN/cm}^2} = 23.42\text{cm}^2 \quad (19)$

Na tabela 1 são apenas representados os nós relevantes para o cálculo da armadura da viga. Adotou-se a regra usual para a quantidade de armadura mínima ( $\rho = 0.2\%A_c$ ) obtendo-se uma quantidade de armadura distribuída de  $5 \text{ cm}^2/\text{m}$ .

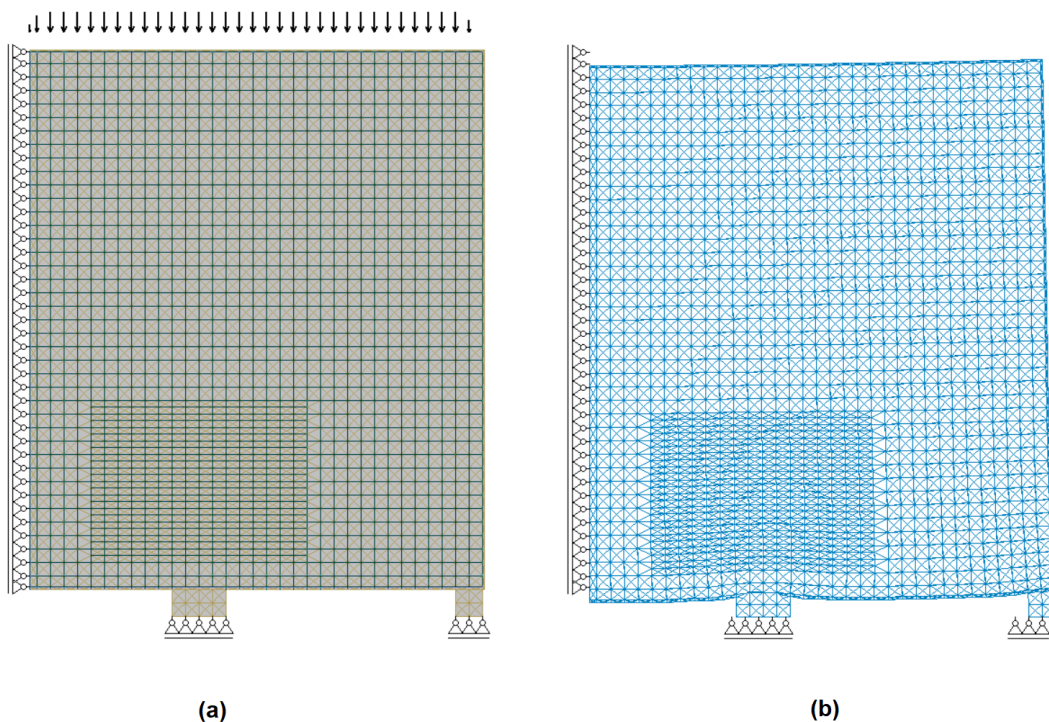
A figura 28 representa a pormenorização para o modelo de referência. Na zona dos apoios intermédios a armadura calculada na equação (18) é distribuída ao longo da altura sujeita à tração, obtida através dos diagramas elásticos e apresentada na figura 19.

Importa salientar que esta pormenorização serve apenas como uma ferramenta de auxílio à execução do modelo de elementos finitos. Para efeitos de aplicação em projeto, deve-se seguir as normas e regras estipuladas para a verificação da segurança da região, nomeadamente a limitação das compressões nos nós e amarração das armaduras, que não mereceram a total atenção nesta dissertação.



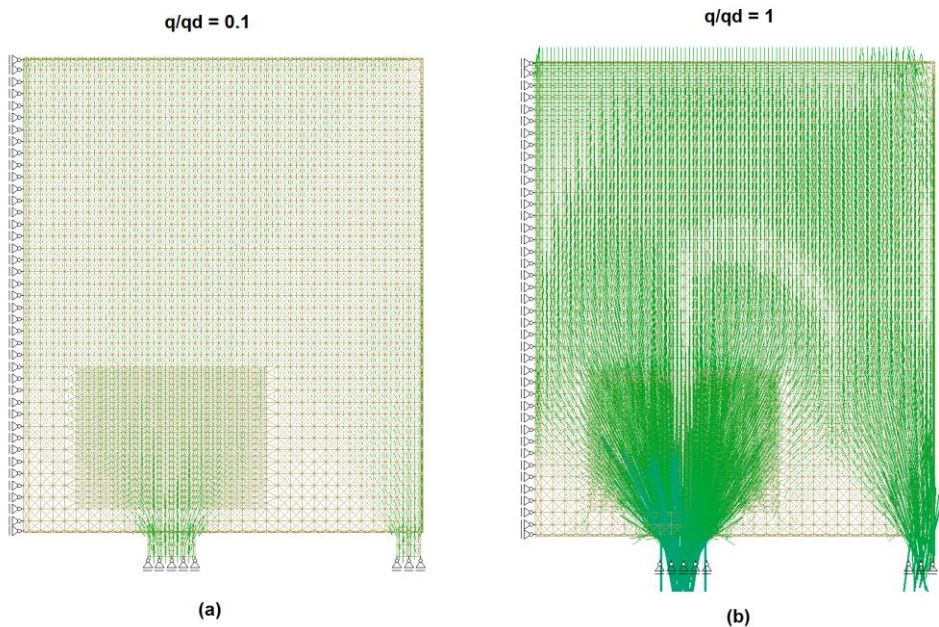
**Figura 28** - Pormenorização do modelo de referência.

Através do programa de elementos finitos desenvolvido por Miguel Ferreira, o EvalS, (Ferreira, Lourenço, & Almeida, 2017) a modelação é feita tirando partido da simetria da estrutura. Desta forma a exigência computacional é mais reduzida. Neste mesmo programa é utilizada uma malha de elementos finitos que simulam o betão e os varões que simulam as armaduras mínimas e de reforço, nos apoios e meio vão. O modelo de elementos finitos e a deformada qualitativa para uma análise elástica da estrutura estão representados na figura 29.



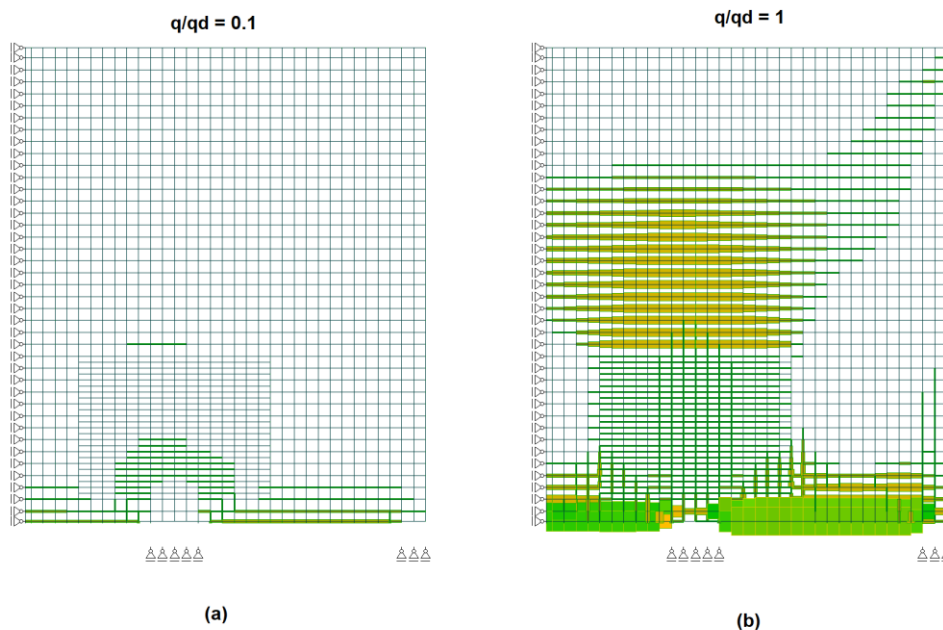
**Figura 29** – (a) Modelo de elementos finitos para o modelo de referência e (b) deformada ampliada da viga parede. Modelo efetuado no EvalS.

Para cada incremento de carga são obtidas as tensões no betão e nas armaduras. Na figura 30 é possível observar o andamento das tensões no betão, modelado através dos elementos CST, para os carregamentos  $q/q_d = 0.1$  e  $q/q_d = 1$ , (sendo  $q$  a carga atuante e  $q_d$  a carga de dimensionamento) ou seja, para os carregamentos  $q = 100\text{kN}$  e  $q = 1000\text{kN}$ , respetivamente. É de realçar que ao longo da análise, a resistência à compressão do betão nunca é ultrapassada.



**Figura 30** - Andamento qualitativo das tensões no betão, retirado do programa EvalS, para os carregamentos (a)  $q/q_d = 0.1$  e (b)  $q/q_d = 1$  do modelo de referência..

Na figura 31 é possível observar, de forma qualitativa, as forças nas armaduras para os incrementos de carga  $q/q_d = 0.1$  e  $q/q_d = 1.0$

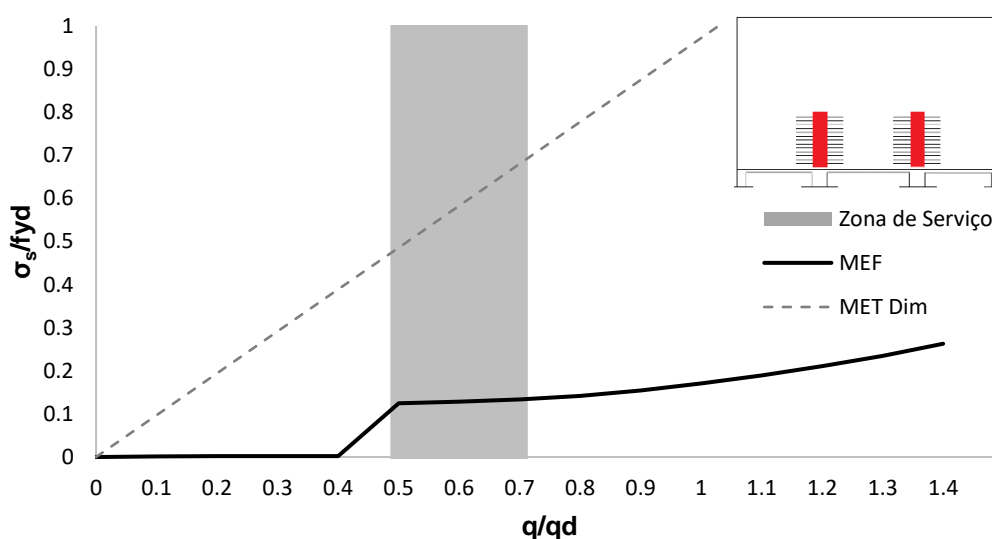


**Figura 31** – Forças aplicadas na armadura, retiradas do programa EvalS, para os carregamentos (a)  $q/q_d = 0.1$  e (b)  $q/q_d = 1$  do modelo de referência.

Nesta dissertação são apenas apresentados os resultados relevantes para a avaliação do modelo de escoras e tirantes de dimensionamento. Neste sentido, uma das análises a seguir representadas é a evolução das tensões na armadura distribuída no apoio intermédio. Neste caso, considerou-se a tensão média na armadura, que é obtida somando a força total aplicada na armadura de reforço e dividindo pela respetiva área. São retirados do EvalS esses valores, para cada incremento de carga, e o andamento obtido está representado no gráfico 1.

Neste mesmo gráfico, no eixo das abcissas está representado o nível de carregamento da estrutura através do quociente entre o incremento de carga e o carregamento de dimensionamento. No eixo das ordenadas, está representado o quociente entre a tensão aplicada e a tensão de cedência da armadura (considerando  $f_{yd} = 435\text{MPa}$ ). Esta notação é utilizada em todos os gráficos e análises.

### Tensão média na armadura de reforço no apoio intermédio



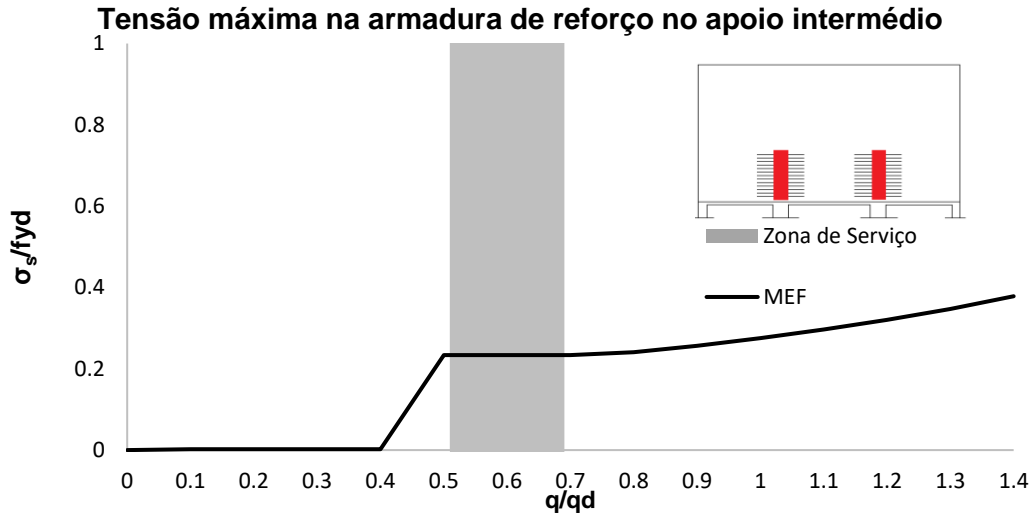
**Gráfico 1** - Andamento da tensão média na armadura de reforço no apoio intermédio e previsão segundo o MET dimensionado para o modelo de referência.

No gráfico, para além de representados os resultados do modelo numérico, está representada, a tracejado, a tensão média na armadura de acordo com o MET de dimensionamento. Como se pode observar o modelo de dimensionamento apresenta tensões superiores às dos resultados numéricos levando a concluir que, para esta zona da estrutura, o MET seria conservativo.

Relativamente aos níveis de tensão média na armadura os resultados levam-nos a concluir que são muito baixos. Para cargas de serviço,  $0.5 < q/q_d < 0.7$ , as tensões médias obtidas estão entre os 54 MPa e 58 MPa, valores que não levantam questões quanto ao comportamento da estrutura em serviço.

Para além desta análise, no gráfico 2 está representado o mesmo resultado, considerando a tensão máxima da armadura de reforço no apoio intermédio.

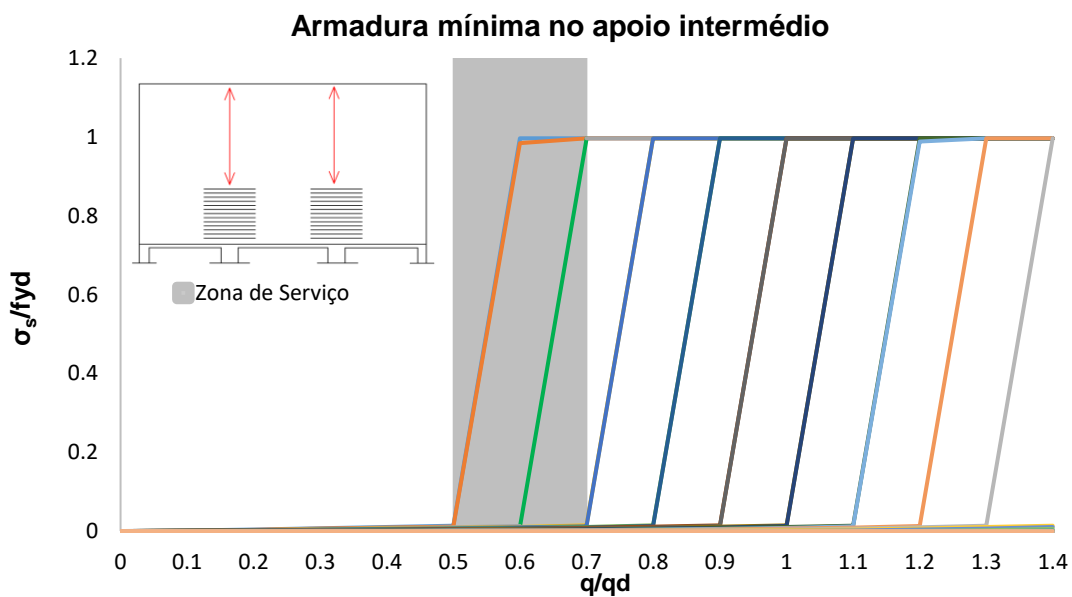




**Gráfico 2** - Andamento da tensão máxima na armadura de reforço no apoio intermédio no modelo de referência..

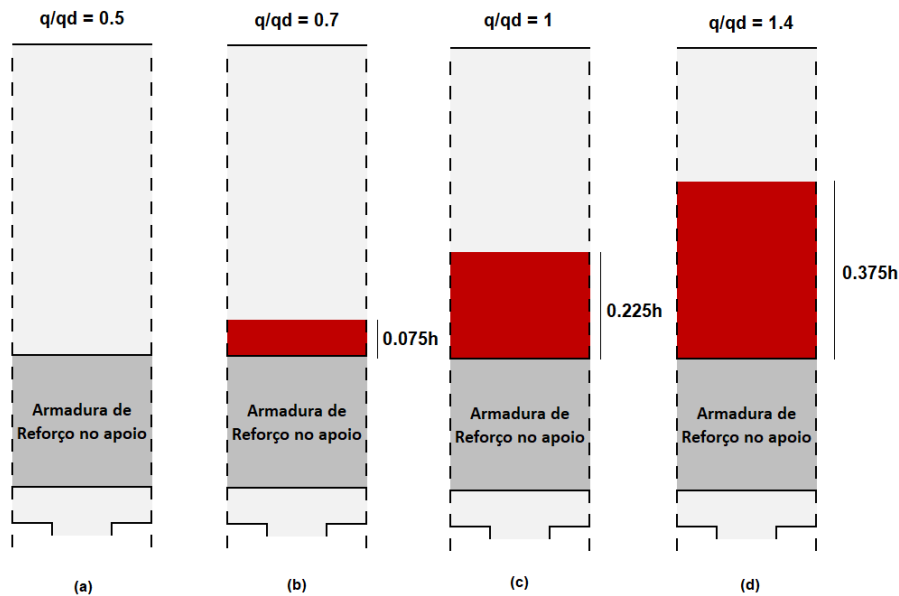
Como se pode observar os gráficos têm andamentos bastante semelhantes, no entanto os valores das tensões associadas são superiores. Em serviço a tensão máxima obtida na armadura de reforço distribuída no apoio intermédio é de 101.73 MPa. Tal como no caso de considerar os valores das tensões médias, esta gama de tensões nas armaduras também não induz a um inadequado comportamento em serviço na zona sobre o apoio intermédio.

Uma conclusão retirada por outros autores (Lourenço & Almeida, Adaptive Stress Field Models: Assessment of Design Models, 2013) refere-se à tendência observada nos modelos não lineares em aumentar o braço ( $z/L$ ) nas vigas parede, ao longo do carregamento, de forma a minimizar a energia de deformação interna na sua redistribuição de esforços. De forma a verificar a ocorrência deste fenómeno e também identificar se existe a possibilidade de ocorrer fendilhação na zona localizada acima da armadura de reforço são apresentados, no gráfico 3 as tensões em cada camada da armadura mínima colocada por cima da armadura de reforço no apoio intermédio.



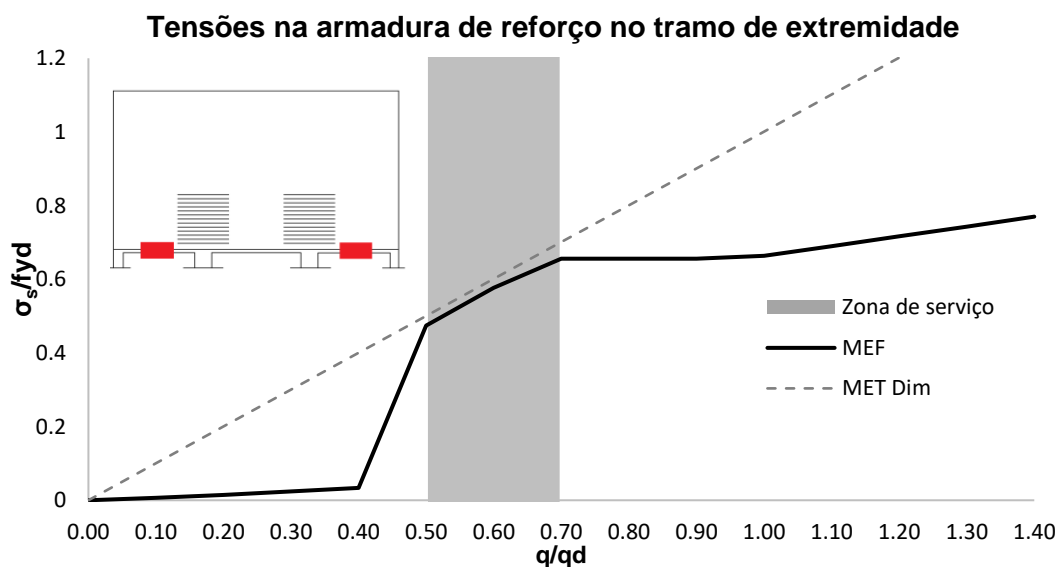
**Gráfico 3** - Tensões na armadura mínima distribuída acima da armadura de reforço na zona do apoio intermédio para o modelo de referência.

A partir do incremento  $q/q_d = 0.5$  ocorre a fendilhação no primeiro e segundo nível de armadura (mínima) colocada acima da armadura de reforço. Assim que ocorre essa fendilhação, o valor da tensão na armadura aproxima-se imediatamente do valor de cedência do aço ( $f_{yd} = 435\text{MPa}$ ). Na zona de serviço,  $0.5 < q/q_d < 0.7$ , ocorre a fendilhação no terceiro nível de armadura mais próximo da armadura de reforço. Na figura 32 estão representadas as alturas das zonas fendilhadas em quatro estados crescentes de carregamento.



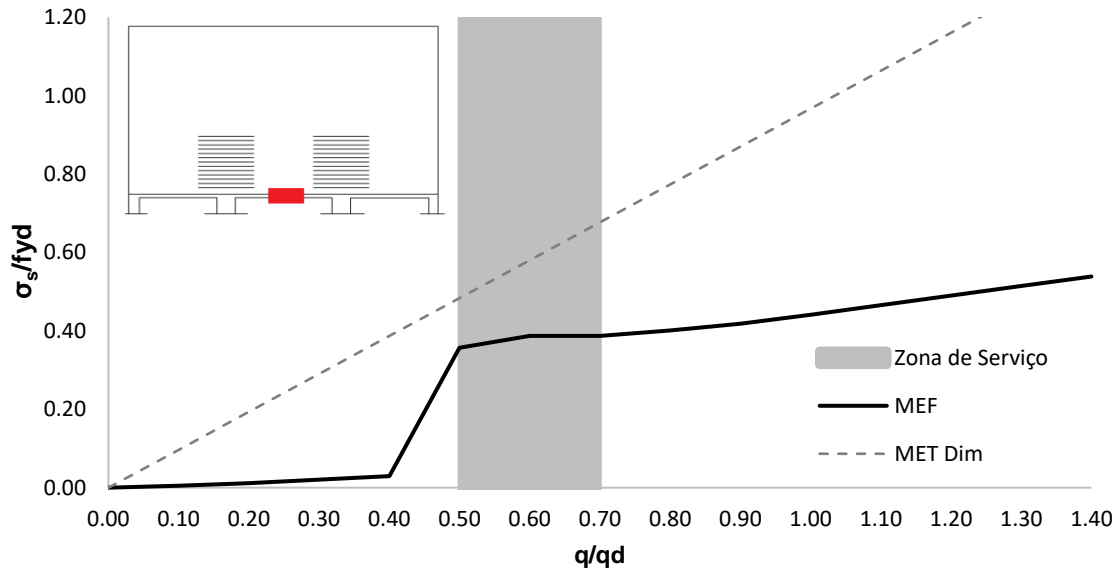
**Figura 32** - Altura da zona com abertura de fendas acima do apoio intermédio para (a)  $q/q_d = 0.5$ , (b)  $q/q_d = 0.7$ , (c)  $q/q_d = 1$  e (d)  $q/q_d = 1.4$ , sendo  $h =$  altura total da viga no modelo de referência

Como se pode observar, a altura da zona fendilhada tende a aumentar, fazendo com que a posição da resultante das trações suba. Esta ideia vai de encontro à conclusão, acima mencionada, apresentada por outros (Lourenço & Almeida, Adaptive Stress Field Models: Assessment of Design Models, 2013). De seguida, nos gráficos 4 e 5 estão representados os resultados obtidos para a variação das tensões a meio vão dos tramos de extremidade e intermédio.



**Gráfico 4** - Andamento da tensão na armadura de reforço no tramo de extremidade e previsão da tensão segundo o MET dimensionado para o modelo de referência.

### Tensão na armadura de reforço a meio vão do tramo intermédio

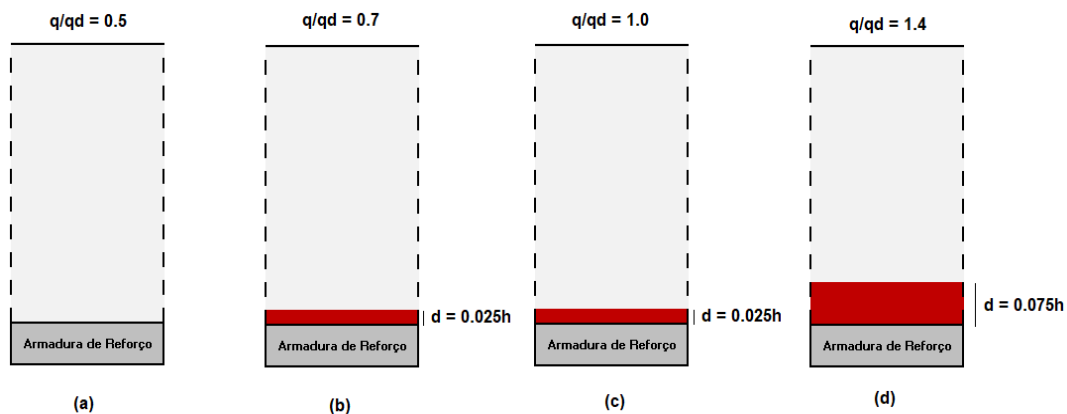


**Gráfico 5** - Andamento da tensão na armadura de reforço do tramo intermédio e previsão da tensão segundo o MET dimensionado para o modelo de referência.

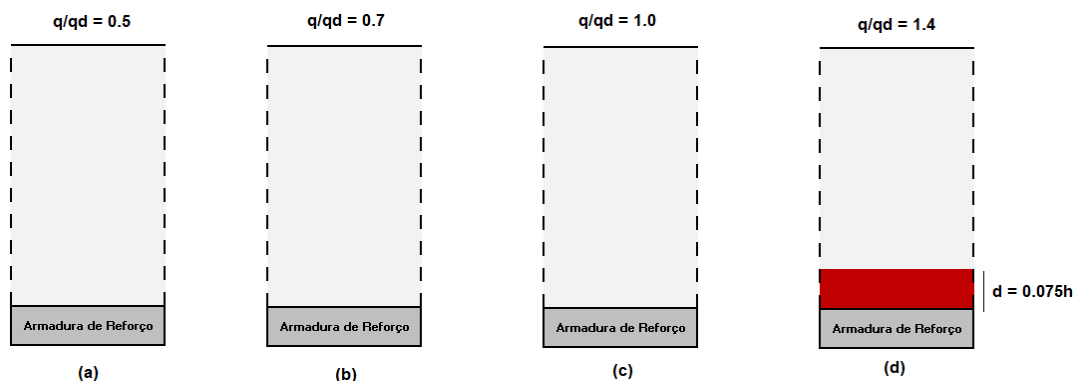
No que diz respeito às tensões em serviço para o meio vão do tramo de extremidade (Gráfico 4), os valores obtidos variam entre 206.4MPa e 285.4MPa. Quanto às tensões a meio vão do tramo intermédio (Gráfico 5), em serviço variam entre os 155.3MPa e os 168.4MPa. Estes valores levam a concluir que o comportamento, em serviço é adequado.

É de notar que, tal como no apoio intermédio, os valores de tensão obtidos pelo MET de dimensionamento são superiores aos valores obtidos pelo MEF. Levando a concluir que o MET considerado (para a solução de referência) também é conservativo para as armaduras de meio vão dos tramos de extremidade e intermédio.

A análise da armadura (mínima) acima da armadura de reforço a meio vão dos tramos de extremidade e intermédio foi feita, à semelhança do que é apresentado para o apoio intermédio, e o resultado está representado nas figuras 33 e 34. Em ambos os casos a altura associada à formação de fendas aumenta com o carregamento.



**Figura 33** – Altura da zona com abertura de fendas acima da armadura a meio vão do tramo de extremidade para (a)  $q/qd = 0.5$ , (b)  $q/qd = 0.7$ , (c)  $q/qd = 1$  e (d)  $q/qd = 1.4$  para o modelo de referência.



**Figura 34** - Altura da zona com abertura de fendas acima da armadura a meio vão do tramo intermédio para (a)  $q/q_d = 0.5$ , (b)  $q/q_d = 0.7$ , (c)  $q/q_d = 1$  e (d)  $q/q_d = 1.4$  no modelo de referência.

### 3.2.3. Modelos com Braços Associados às Trajetórias Elásticas

Uma das categorias da criação de modelos adotada nesta dissertação foi o dimensionamento de modelos cujos braços são iguais aos braços utilizados no modelo de referência. Ou seja, os braços estão situados nos centros dos diagramas de tensões da trajetória elástica.

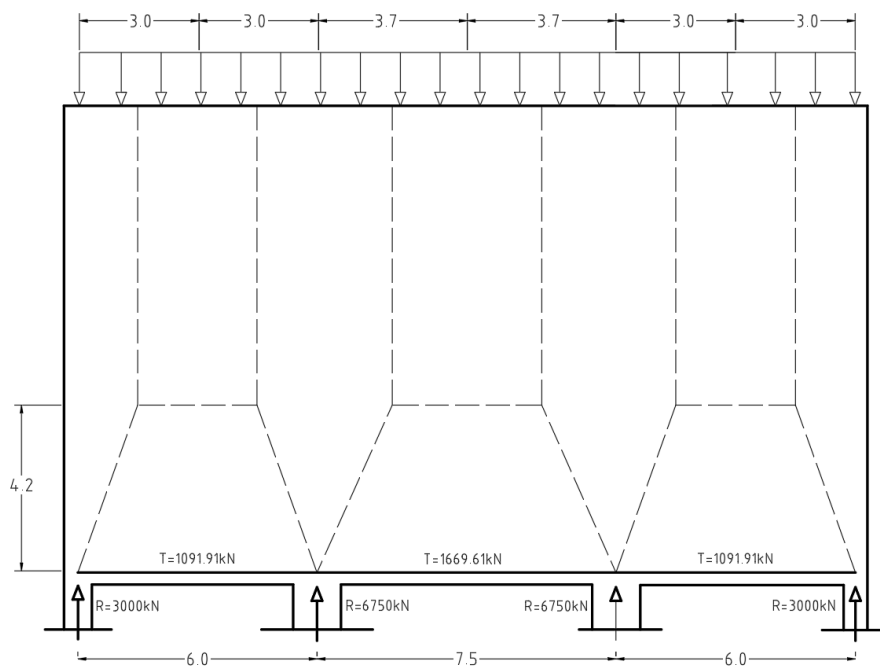
O parâmetro variável nesta categoria é, tal como referido anteriormente, o valor da reação no apoio de extremidade da viga parede. Nos modelos concebidos nesta análise, esse valor varia entre os 3000 kN (metade da carga aplicada no tramo,  $0,5pl$ , sendo  $p$  o carregamento e  $l$  o vão) e 0 kN.

Para o caso em que a reação é 3000 kN, a viga parede contínua é dimensionada como se fosse um conjunto de vigas simplesmente apoiadas. No outro extremo, para o caso em que a reação é 0 kN é considerado um comportamento em consola do tramo de extremidade, sendo que a carga é toda equilibrada no apoio intermédio. Os modelos foram calculados de forma semelhante ao cálculo do modelo de referência. Depois de imposta a reação no apoio de extremidade facilmente se obtém os valores associados às escoras e tirantes, assim como os ângulos entre os elementos. Nesta categoria foram analisados cinco modelos, que foram comparados com o modelo de referência:

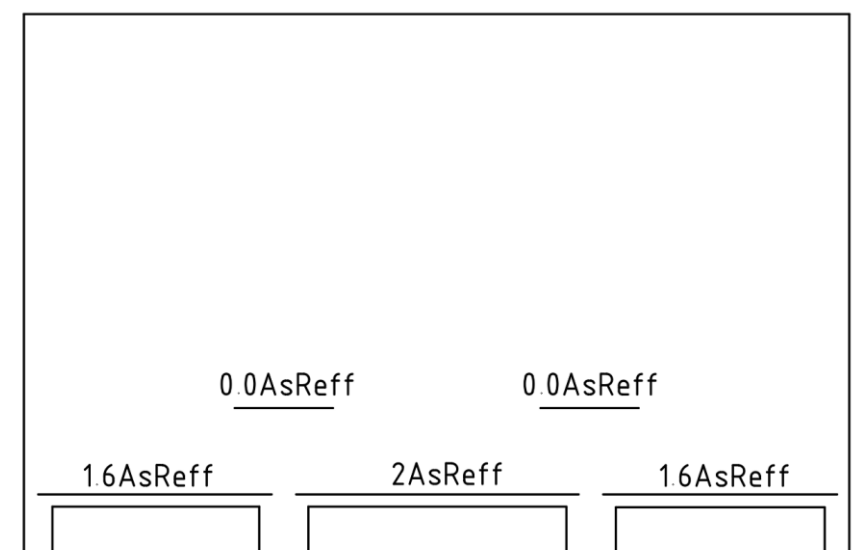
- **Reação no apoio de extremidade:  $0.5pl$**

Este modelo representa um dos casos extremos, simulando o comportamento do tramo de extremidade como uma viga parede simplesmente apoiada. Assim sendo os apoios recebem metade da carga de cada tramo.

No MET deste caso, representado na figura 35, deixa de haver reforço de armadura no apoio intermédio. O valor da tração nos tirantes a meio vão intermédio e de extremidade é mais elevado comparativamente ao modelo de referência, resultando numa maior quantidade de armadura.



**Figura 35** - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com 0.5pl de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros)



**Figura 36** - Quantidade de armadura de cálculo do modelo com 0.5pl de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros)

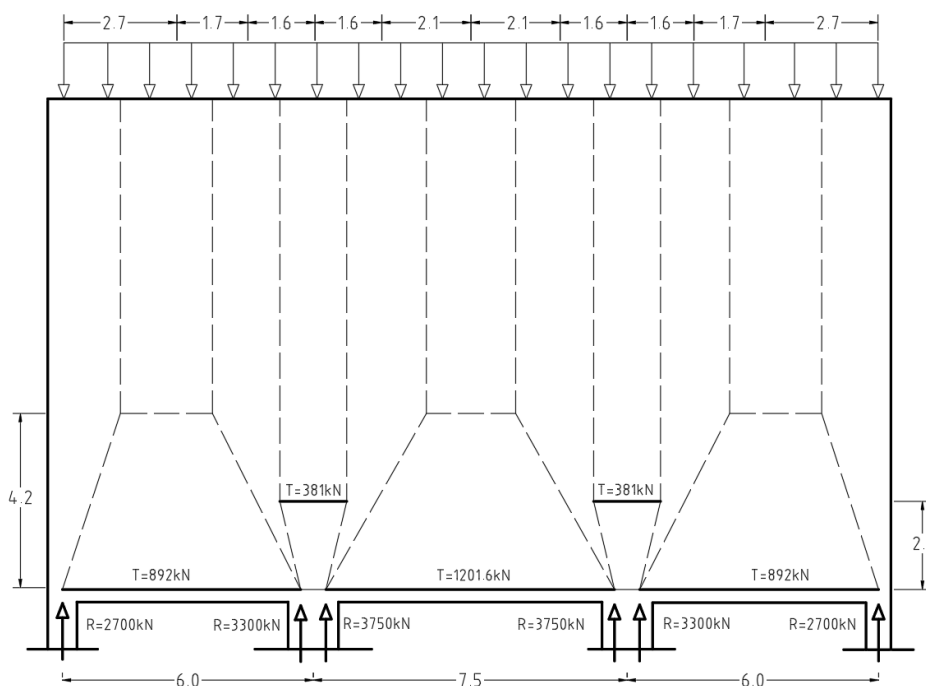
A quantidade de armadura mínima a colocar é igual à considerada no modelo de referência, isto é,  $\rho=0.2\%$ . A meio vão do tramo de extremidade a área de armadura é dada por  $A_s(cm^2) = \frac{1091.91}{43.5} = 25.10cm^2$ , correspondente a  $1.6A_{ref}$ , sendo  $A_{ref}$  a armadura escolhida no modelo de referência. Foram escolhidos  $2\text{Ø}25+2\text{Ø}32$ . Para o meio vão do tramo intermédio a área de armadura obtida é  $A_s(cm^2) = \frac{1669.61}{43.5} = 38.38cm^2$ , equivalente a cerca de  $2A_{ref}$ , sendo escolhidos  $5\text{Ø}32$ . A escolha de armaduras indicadas, que não correspondem naturalmente a pormenorizações adequadas, tem como único objetivo materializar a área de armadura necessária, simplificando o modelo de análise. Na zona do apoio intermédio apenas é colocada armadura mínima, equivalente a  $0.7A_{ref}$ . Na figura 36 está

representada a quantidade de armadura de reforço calculada neste modelo em relação ao modelo de referência. Em anexo (Figura A-1) está representada a pormenorização utilizada para este modelo.

De modo a facilitar a análise dos modelos, é definida como nomenclatura associada a este modelo 2.0-0.0-1.6. Estes termos estão associados às relações entre as armaduras a meio vão intermédio, apoio intermédio e meio vão de extremidade, respetivamente, calculadas para o presente modelo e para o modelo de referência.

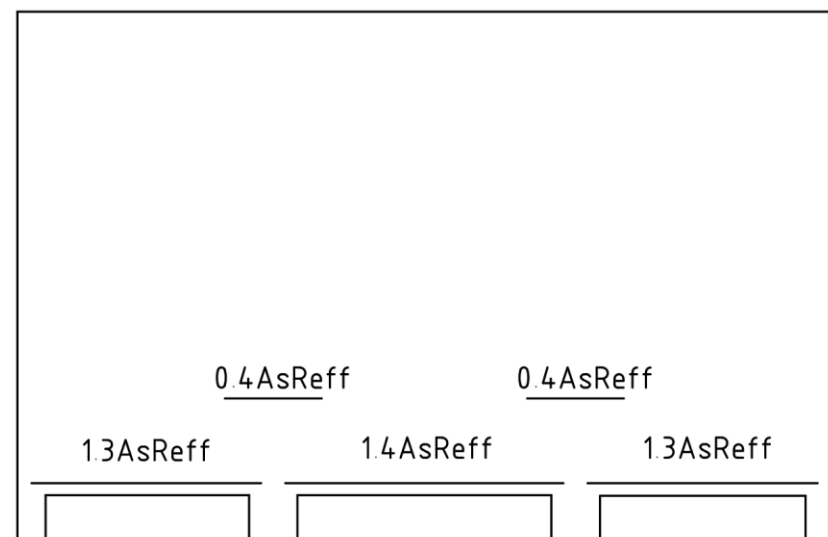
○ **Reação no apoio de extremidade: 0.45pl**

Para este modelo o valor associado à reação no apoio de extremidade é 2700kN, equivalente a 0.45pl. O MET está representado na figura 37.



**Figura 37** - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com 0.45pl de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros)

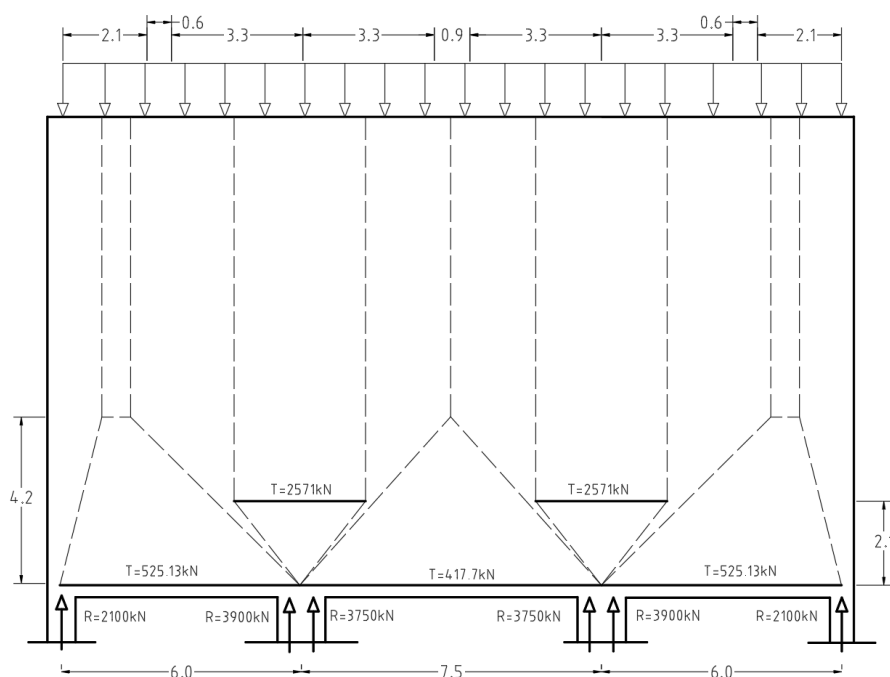
Para além da armadura mínima semelhante à dos outros modelos, a quantidade de armadura a meio vão do tramo de extremidade é  $A_s(cm^2) = \frac{892}{43.5} = 20.5cm^2$ , equivalente a  $1.3A_{reff}$ . Para esta zona são escolhidos 5Ø25. A meio vão do tramo intermédio o valor da armadura é  $A_s(cm^2) = \frac{1201.6}{43.5} = 27.62cm^2$ , equivalente a  $1.4A_{reff}$ , sendo escolhidos 4Ø32. No apoio intermédio a armadura de reforço é  $A_s(cm^2) = \frac{381}{43.5} = 8.76cm^2$ , equivalente a  $2.43cm^2/m$  ( $0.4A_{reff}$ ). A armadura mínima colocada na estrutura supera este valor nesta zona, não havendo necessidade de adicionar qualquer armadura de reforço. A armadura mínima é equivalente a  $0.7A_{reff}$ . A nomenclatura atribuída ao modelo é 1.4-0.4-1.3. Na figura 38 está representada a quantidade de armadura colocada neste modelo com 0.45pl de reação no apoio de extremidade em relação à quantidade de armadura no modelo de referência. Em anexo (Figura A-2) está representada a pormenorização utilizada para a modelação deste modelo.



**Figura 38** - Quantidade de armadura calculada do modelo com 0.45pl de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência.

o **Reação no apoio de extremidade: 0.35pl**

Este modelo, ao contrário dos outros, apresenta uma reação no apoio de extremidade superior à reação do modelo de referência. O MET está representado na figura 39.

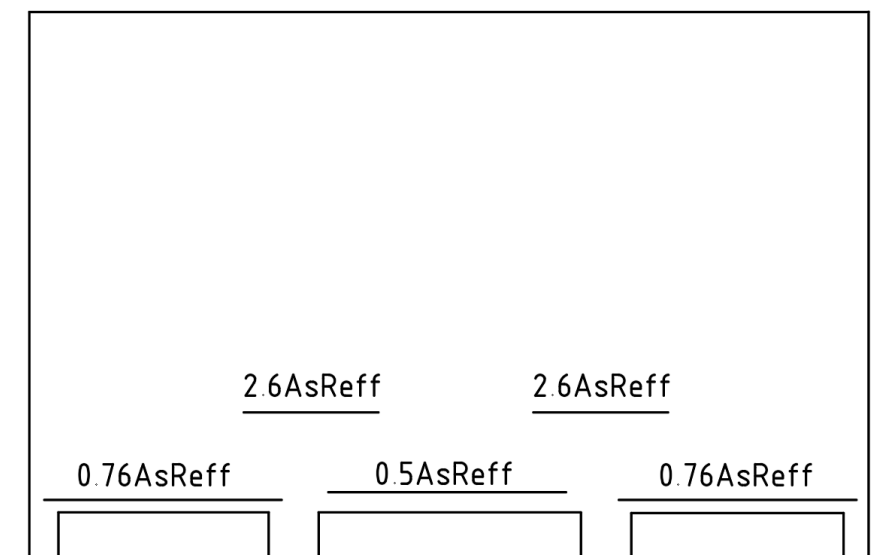


**Figura 39** - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com 0.35pl de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros)

A meio vão do tramo intermédio a armadura é dada por  $A_s(cm^2) = \frac{417}{43.5} = 9.6 cm^2$  sendo colocados 3Ø20, correspondente a  $0.5A_{reff}$ . No apoio intermédio a armadura obtida é  $A_s(cm^2) = \frac{2571}{43.5} = 59.10 cm^2$ . Nesta zona foi colocada uma armadura distribuída de Ø10//0.30 + Ø16//0.30,

correspondente a  $2.6A_{\text{reff}}$ . Por fim, a meio vão do tramo de extremidade foi colocado um reforço de  $4\text{Ø}20$  correspondente a  $0.76A_{\text{reff}}$  e obtido por  $A_s(\text{cm}^2) = \frac{525.13}{43.5} = 12 \text{ cm}^2$ .

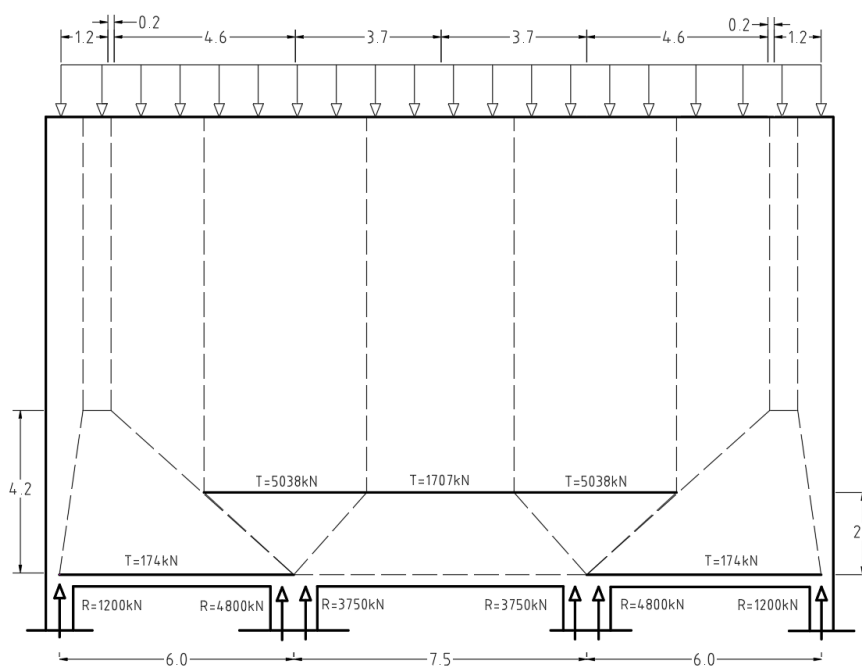
A nomenclatura atribuída a este modelo é portanto 0.5-2.6-0.76 e a quantidade de armadura está representada na figura 40. Em anexo (Figura A-3) está representada a pormenorização utilizada.



**Figura 40** - Quantidade de armadura calculada do modelo com  $0.35pl$  de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência.

- **Reação no apoio de extremidade:  $0.2pl$**

O MET do modelo está representado na figura 41.

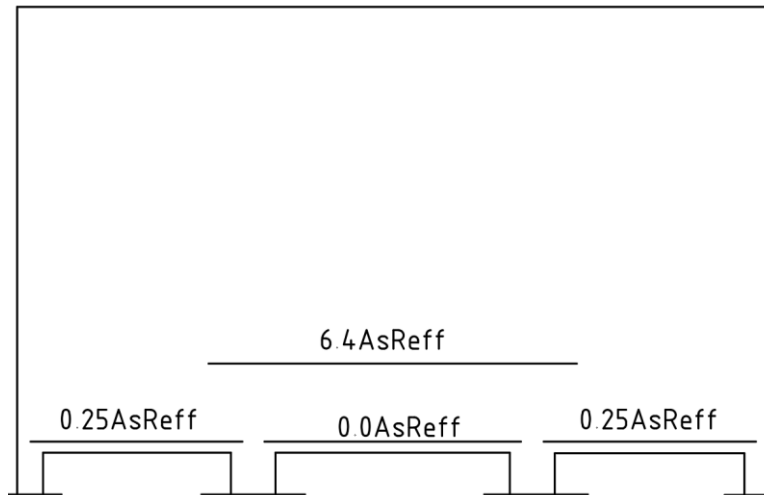


**Figura 41** - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com  $0.2pl$  de reação no apoio de extremidade. (Dimensões em metros)



Ao contrário dos outros modelos apresentados anteriormente, na zona inferior do meio vão do tramo intermédio ocorrem compressões. Para a zona inferior do meio vão do tramo intermédio a armadura calculada foi  $A_s(cm^2) = \frac{174}{43.5} = 4 cm^2$ , sendo escolhidos 2Ø16, correspondente a  $0.25A_{reff}$ . No apoio intermédio a armadura calculada foi  $A_s(cm^2) = \frac{5083}{43.5} = 115.8 cm^2$ , equivalente a  $32cm^2/m$ , sendo escolhido Ø25//0.30. Esta armadura corresponde a  $6.4A_{reff}$ .

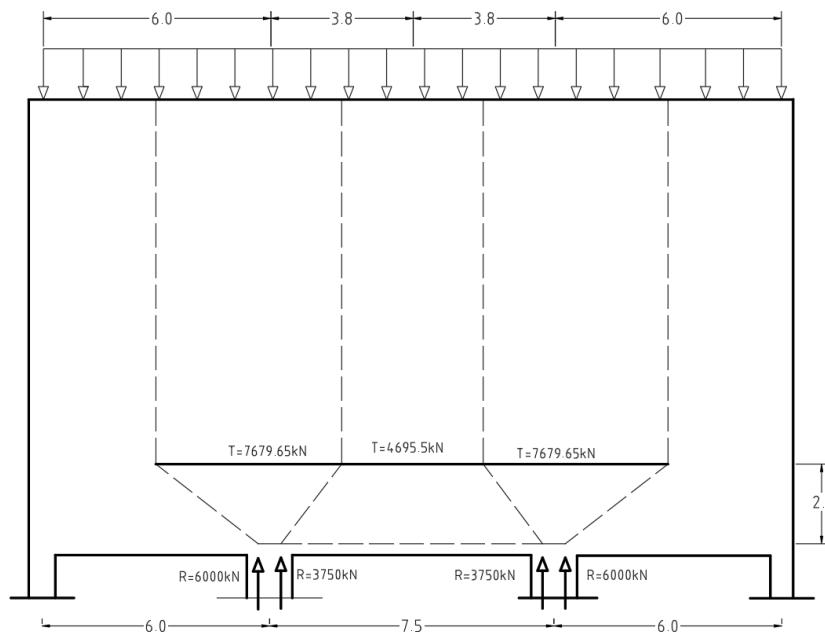
A nomenclatura associada a este modelo é 0.0-6.4-0.25. Na figura 42 está representada a quantidade de armadura calculada para o modelo e em anexo (Figura A-4) a sua pormenorização



**Figura 42** - Quantidade de armadura calculada para o modelo com 0.2pl de reação no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros)

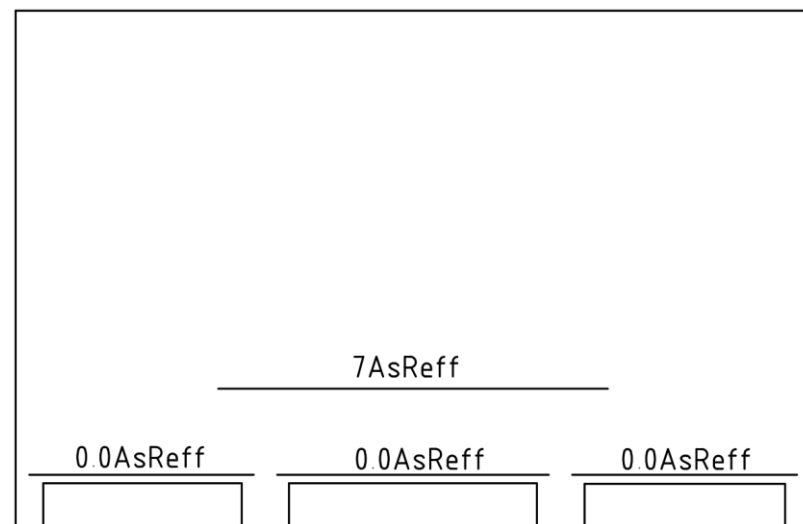
o **Reação no apoio de extremidade: 0pl**

Este caso simula o comportamento do tramo de extremidade como uma consola, sendo a carga toda descarregada no apoio intermédio. A figura 43 representa o MET associado a este modelo.



**Figura 43** - MET e valores das forças nos tirantes para o modelo com reação nula no apoio de extremidade. (Dimensões em metros)

Nos apoios intermédios o valor da armadura calculada é  $A_s(cm^2) = \frac{7679.65}{43.5} = 176.54cm^2$  equivalente a uma armadura distribuída de  $49cm^2/m$ . Foi escolhida uma armadura de  $\varnothing 25//0.10$ . Este valor é equivalente a  $7A_{reff}$ . A meio vão dos tramos intermédio e de extremidade apenas é colocada armadura mínima ( $\rho=0.2\%$ ). A relação entre a quantidade de armadura calculada e a quantidade de armadura do modelo de referência está representado na figura 44. Em anexo (Figura A-5) está representada a pormenorização utilizada na modelação.



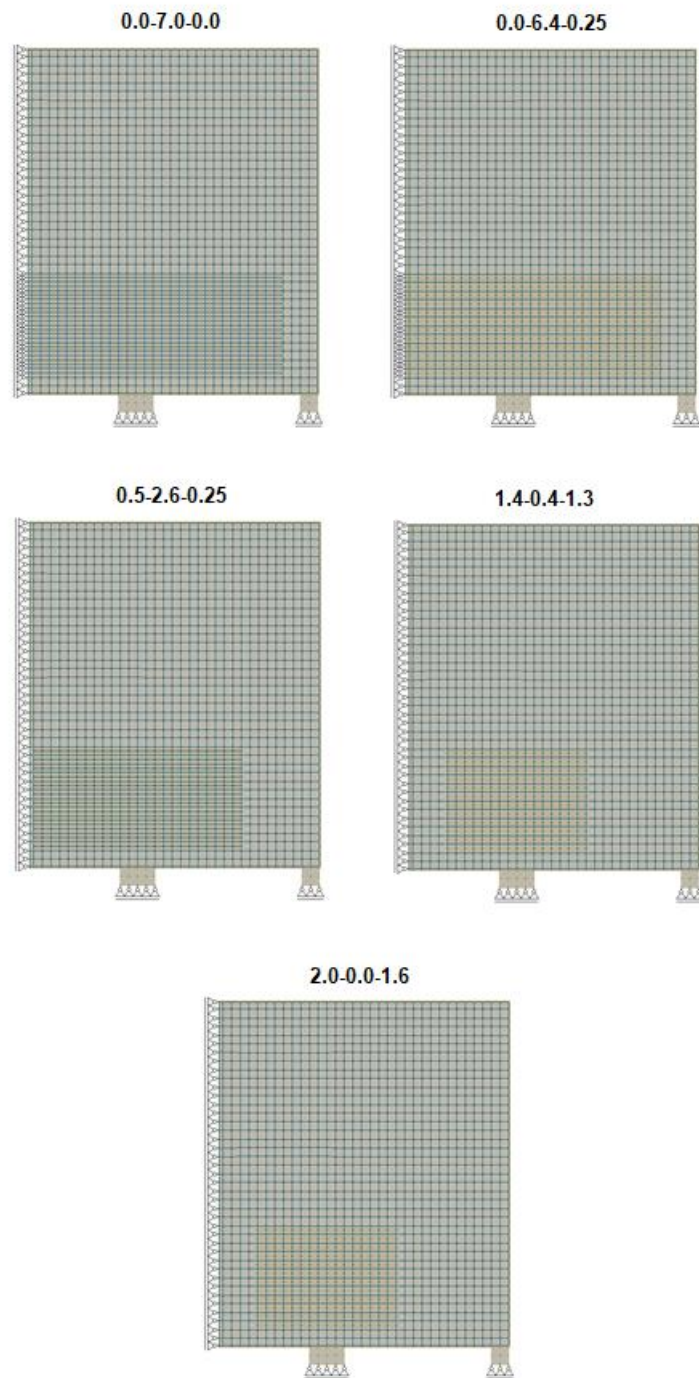
**Figura 44** - Quantidade de armadura calculada do modelo com reação nula no apoio de extremidade em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros)

Na tabela seguinte (Tabela 2) está representado um resumo dos modelos dimensionados, assim como os valores das armaduras e as respetivas nomenclaturas atribuídas.

**Tabela 2** - Quantidade de armadura calculada e nomenclatura dos modelos.  
(\*)- Valor inferior à área de armadura mínima.

Valor da Reação	Tramo Intermédio	Apoio Intermédio	Tramo de Extremidade	Nomenclatura
<b>0</b>	0.0As,reff (*)	7.0As,reff	0.0As,reff (*)	0.0-7.0-0.0
<b>0.2pl</b>	0.0As,reff (*)	6.4As,reff	0.25As,reff	0.0-6.4-0.25
<b>0.35pl</b>	0.5As,reff	2.6As,reff	0.76As,reff	0.5-2.6-0.25
<b>Modelo de Referência</b>	As,reff	As,reff	As,reff	Modelo de Referência
<b>0.45pl</b>	1.4As,reff	0.4As,reff (*)	1.3As,reff	1.4-0.4-1.3
<b>0.5pl</b>	2.0As,reff	0.0As,reff (*)	1.6As,reff	2.0-0.0-1.6

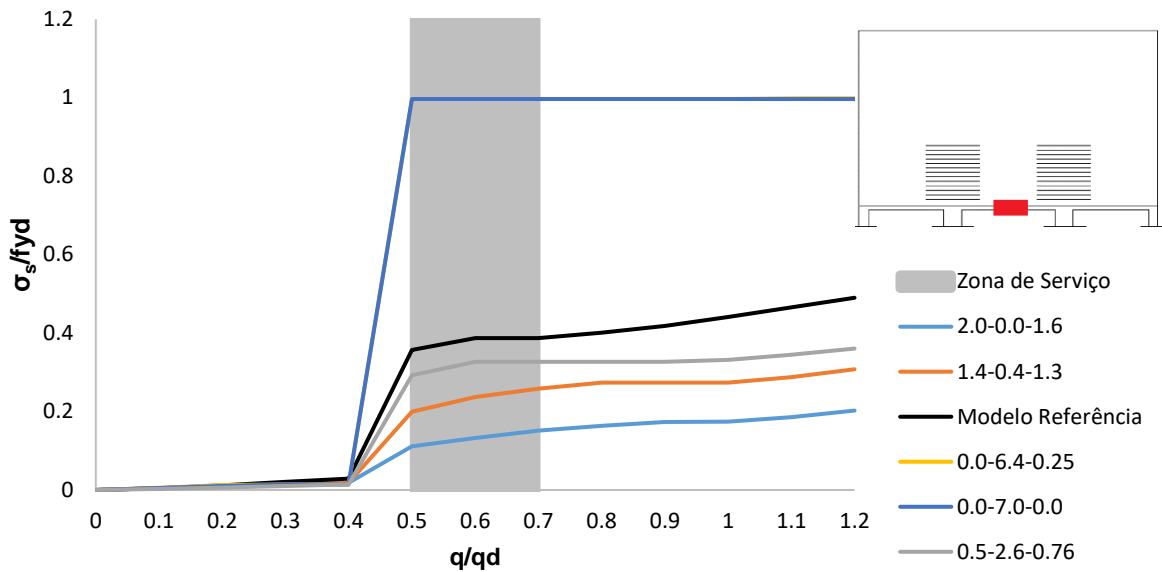
Uma vez mais utilizou-se a simetria da estrutura na modelação dos diversos modelos no EvalS (Figura 45).



**Figura 45** – Modelação dos modelos com braços associados à trajetória elástica no EvalS.

No gráfico 6 está representado o andamento das tensões a meio vão do tramo intermédio. Tal como explicado anteriormente a quantidade de armadura colocada em cada modelo,  $A_s/A_{s,ref}$ , nesta zona, está indicado no primeiro número escrito na sua nomenclatura.

### Tensões na armadura de reforço no tramo intermédio



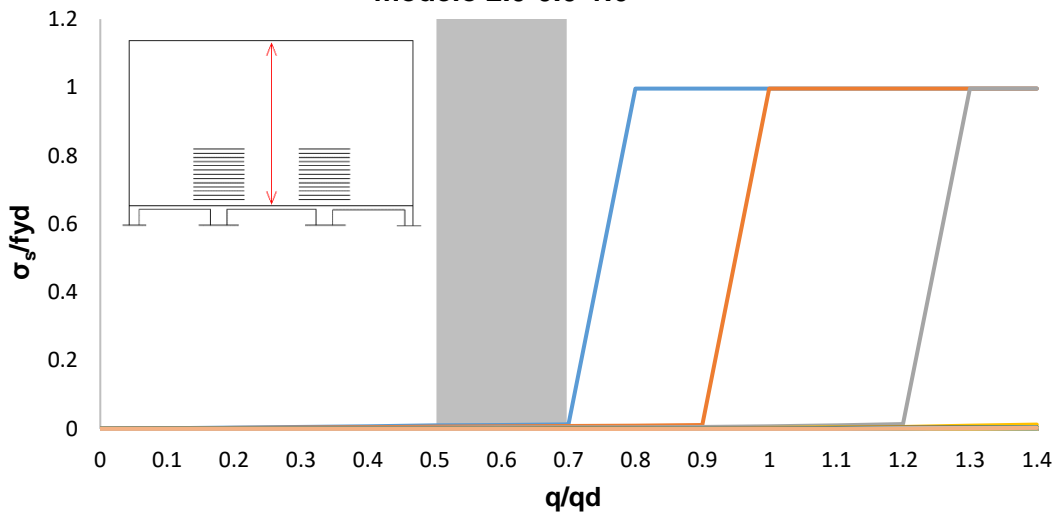
**Gráfico 6** - Andamento das tensões na armadura inferior a meio vão do tramo intermédio para os modelos com os braços elásticos.

Como concluído anteriormente, o modelo de referência apresenta valores aceitáveis de tensões em serviço. As tensões na armadura de reforço para o modelo com 1.4As,ref variam entre 86MPa e 112MPa na zona de serviço. Para o modelo com 2As,ref esta variação é entre 48MPa e 66MPa. Já para o modelo com 0.5As,ref as tensões em serviço variam entre 127MPa e 143MPa. Nestes três modelos o comportamento em serviço é adequado não levantando questões quanto ao controlo da fendilhação para cargas de serviço.

O mesmo não acontece nos modelos isentos de armadura de reforço, modelos 0.0-7.0-0.0 e 0.0-6.4-0.25 (andamentos quase sobrepostos no gráfico 6). Como se pode observar, em zona de serviço estes modelos apresentam tensões demasiado elevadas, o que pode originar aberturas de fendas excessivas. Em suma, a par do modelo de referência, apenas os modelos 1.4-0.4-1.3, 2-0.0-1.6 e 0.5-2.6-0.76 conduzirão a um comportamento adequado em serviço.

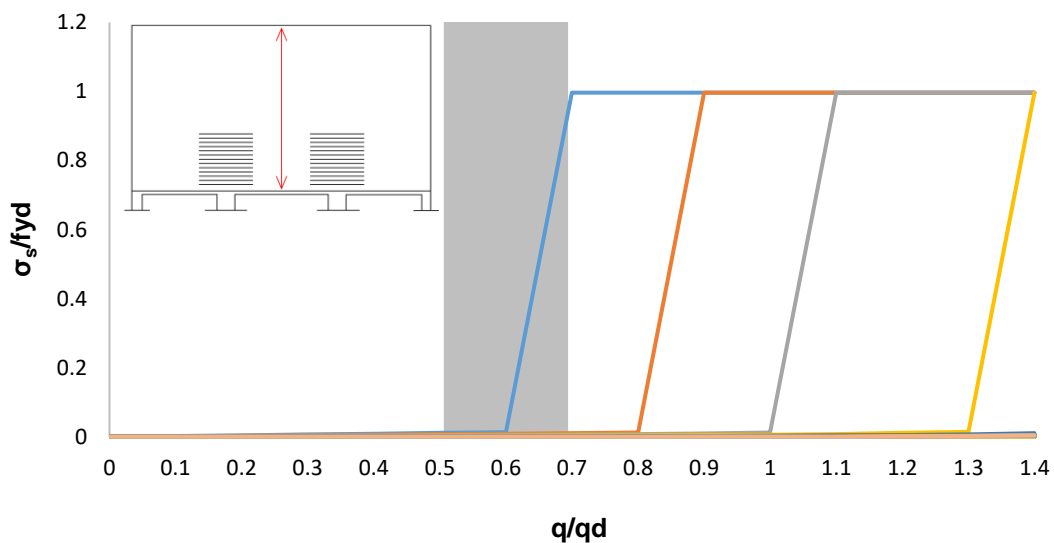
Foi também efetuada, para estes modelos, uma análise à armadura mínima de distribuição colocada acima da armadura de reforço (Gráficos 7 e 8). Após a fendilhação e conseqüente perda de rigidez na zona inferior do meio vão do tramo intermédio, vai ocorrendo a fendilhação gradual ao nível das armaduras colocadas acima desta zona.

**Armadura mínima a meio vão do tramo intermédio do modelo 2.0-0.0-1.6**



**Gráfico 7** - Tensões na armadura mínima distribuída acima da armadura de reforço na zona de meio vão do tramo intermédio para o modelo 2.0-0.0-1.6.

**Armadura mínima a meio vão do tramo intermédio do modelo 1.4-0.4-1.3**

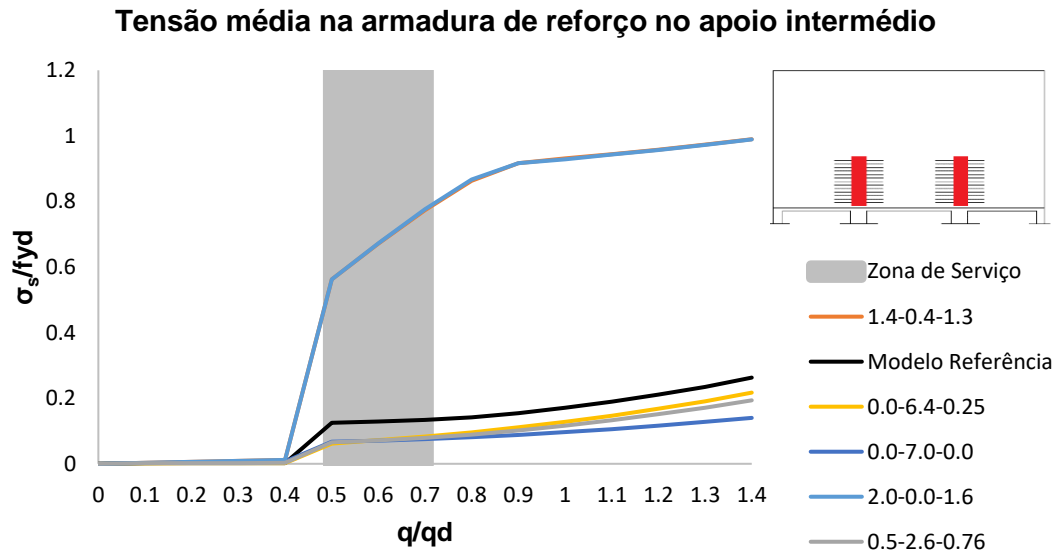


**Gráfico 8** - Tensões na armadura mínima distribuída acima da armadura de reforço na zona de meio vão do tramo intermédio para o modelo 1.4-0.4-1.3.

No modelo 2.0-0.0-1.6 (Gráfico 7), na zona de serviço não ocorre fendilhação ao nível de nenhuma armadura mínima, sendo que apenas a partir do incremento de carga  $q/q_d=0.7$  é que ocorre a primeira fenda. Quanto ao modelo 1.4-0.4-1.3 (Gráfico 8), apenas ocorre a fendilhação ao nível da primeira armadura mínima de distribuição, no patamar de cargas de serviço.

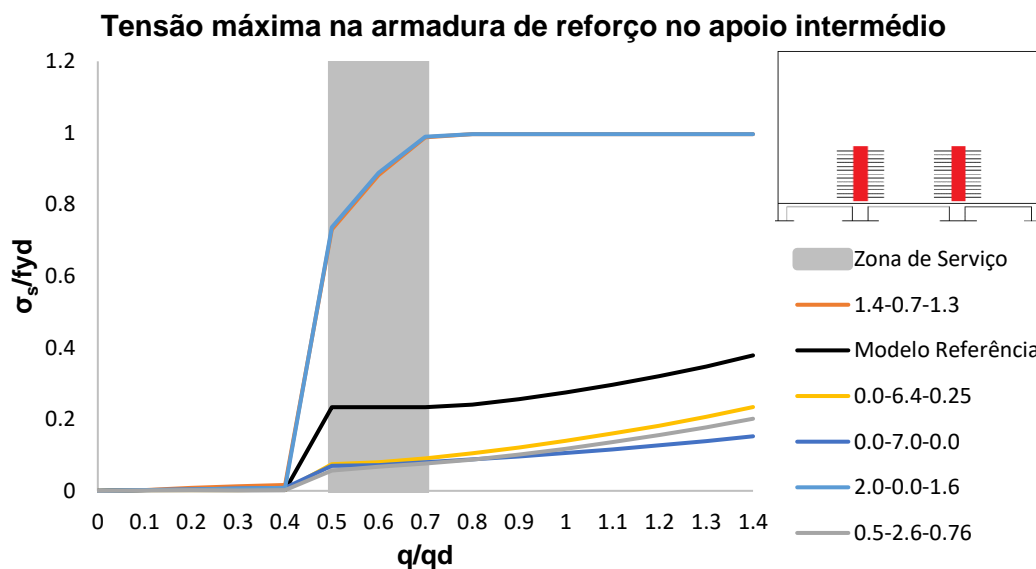
O moderado nível de tensões e a relativamente pequena quantidade de armaduras mínimas fendilhadas levam-nos a concluir que quer os modelos 2.0-0.0-1.6, 1.4-0.4-1.3 e 0.5-2.6-0.76 no tramo intermédio, apresentam bons resultados.

Para a zona do apoio intermédio foi efetuada a mesma análise apresentada para o modelo de referência. No gráfico 9 está representada a tensão média nas armaduras do apoio intermédio ao longo do carregamento. O segundo termo da nomenclatura dos modelos representa a quantidade de armadura nesta zona ( $A_s/A_{s,ref}$ ).



**Gráfico 9** – Tensão média nas armaduras de reforço no apoio intermédio para os modelos com o braço elástico.

Tal como efetuado na análise no modelo de referência, no gráfico 10 está representada a tensão máxima gerada na armadura de reforço no apoio intermédio para cada modelo.



**Gráfico 10** - Tensão máxima nas armaduras de reforço no apoio intermédio nos modelos com o braço elástico.

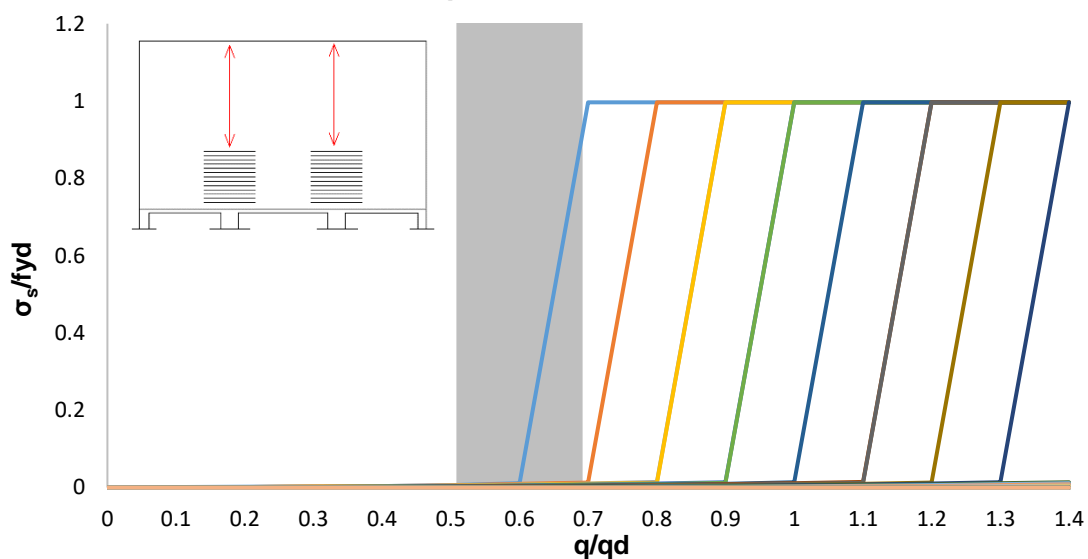
Os modelos *0.0-7.0-0.0*, *0.0-6.4-0.25* e *0.5-2.6-0.76* são, juntamente com o modelo de referência, os únicos modelos que necessitam de reforço de armadura no apoio intermédio, para além da armadura mínima. Todos eles apresentam níveis de tensão reduzidos para o comportamento em serviço. O modelo *0.0-7.0-0.0* apresenta tensões médias entre 23MPa e 32MPa, e tensões máximas

entre 30 e 34MPa. Já o modelo 0.0-6.4-0.25, apresenta como tensões médias valores entre 27MPa e 36MPa e tensões máximas entre 32MPa e 39MPa. Quanto ao modelo 0.5-2.6-0.76 as tensões médias variam entre 24MPa e 33MPa e as tensões máximas variam entre 28MPa e 34MPa.

Já os modelos 1.4-0.4-1.3 e 2.0-0.7-1.6 apresentam níveis elevados de tensão nas armaduras na zona de serviço, levando a concluir que, provavelmente, serão modelos e pormenorizações que conduzirão a um inadequado comportamento em serviço.

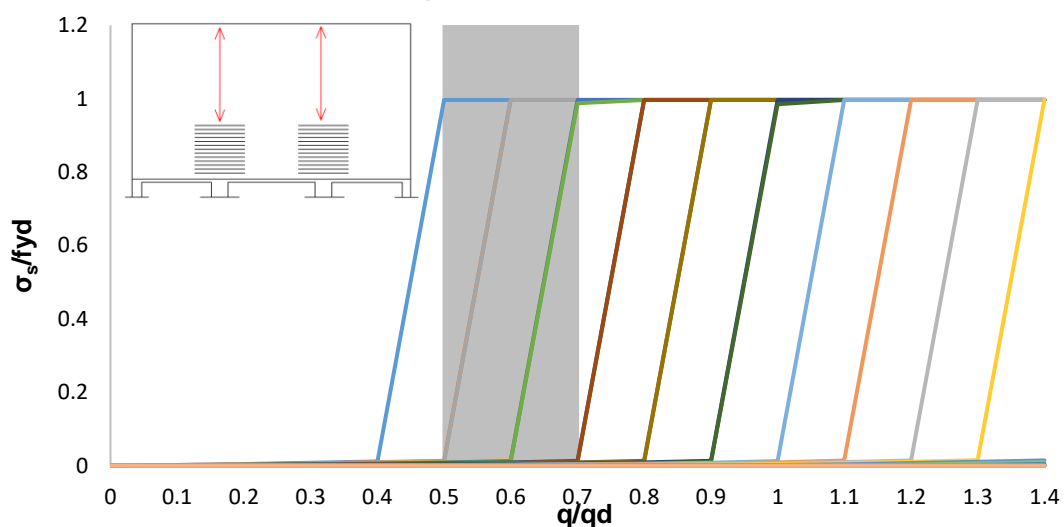
Nos gráficos seguintes (gráficos 11,12 e 13) repete-se a análise à armadura mínima, à imagem do que havia sido feito para o modelo de referência.

### Armadura mínima no apoio intermédio no modelo 0.0-7.0-0.0



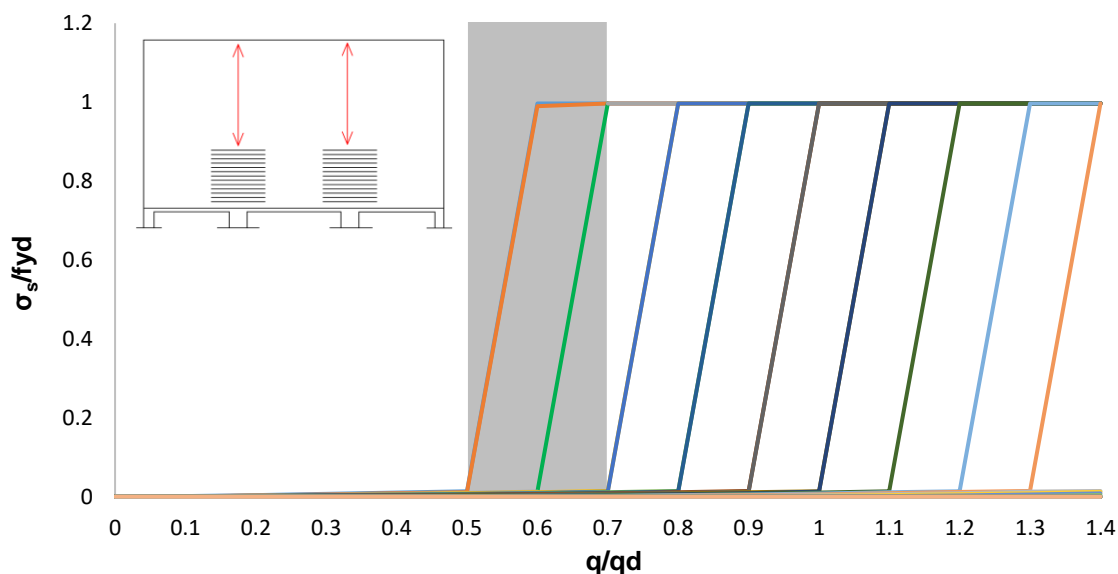
**Gráfico 11** - Tensões na armadura mínima no apoio intermédio para o modelo 0.0-7.0-0.0.

### Armadura mínima no apoio intermédio no modelo 0.0-6.4-0.25



**Gráfico 12** - Tensões na armadura mínima no apoio intermédio para o modelo 0.0-6.4-0.25.

### Armadura mínima no apoio intermédio no modelo 0.5-2.6-0.76

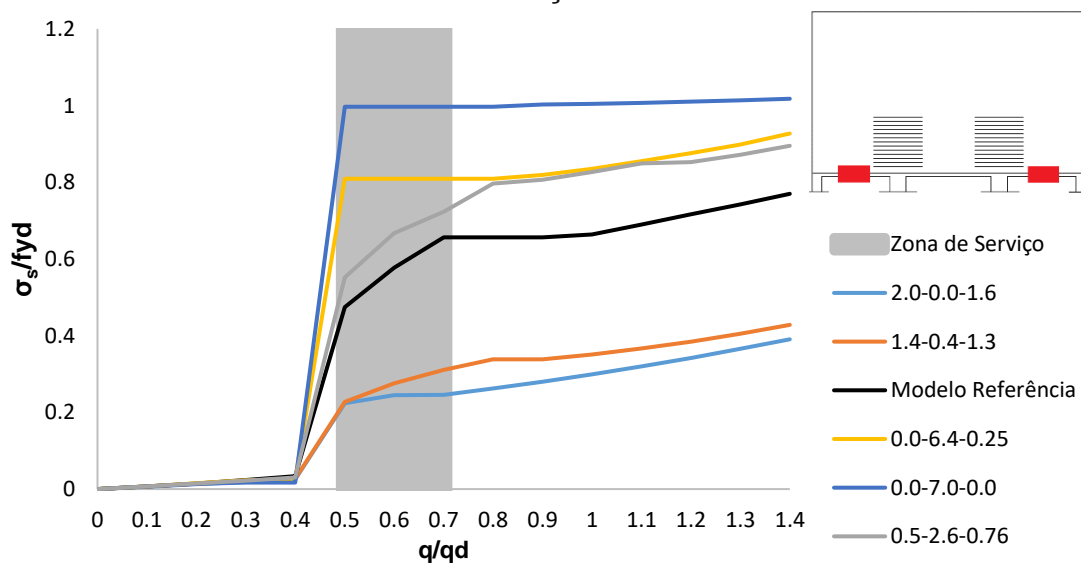


**Gráfico 13** - Tensões na armadura mínima no apoio intermédio para o modelo 0.5-2.6-0.76.

No modelo 0.0-7.0-0.0, ocorre a fendilhação ao nível das duas armaduras colocadas consecutivamente acima da armadura de reforço no apoio intermédio. Já no modelo 0.0-6.4-0.25, a primeira fendilhação ocorre no incremento de carga  $q/q_d=0.4$ , e no fim da zona de serviço já ocorreu a fendilhação ao nível de quatro níveis de armaduras colocadas acima da armadura de reforço. No modelo 0.5-2.6-0.76 para o incremento de carga  $q/q_d=0.7$  já ocorreu a fendilhação ao longo de três níveis de armaduras mínimas.

Relativamente ao meio vão do tramo de extremidade, o andamento das tensões na armadura de reforço na zona inferior está representado no gráfico 14.

### Tensões na armadura de reforço no tramo de extremidade



**Gráfico 14** - Tensão na armadura de reforço no tramo de extremidade nos modelos com braços associados às trajetórias elásticas.

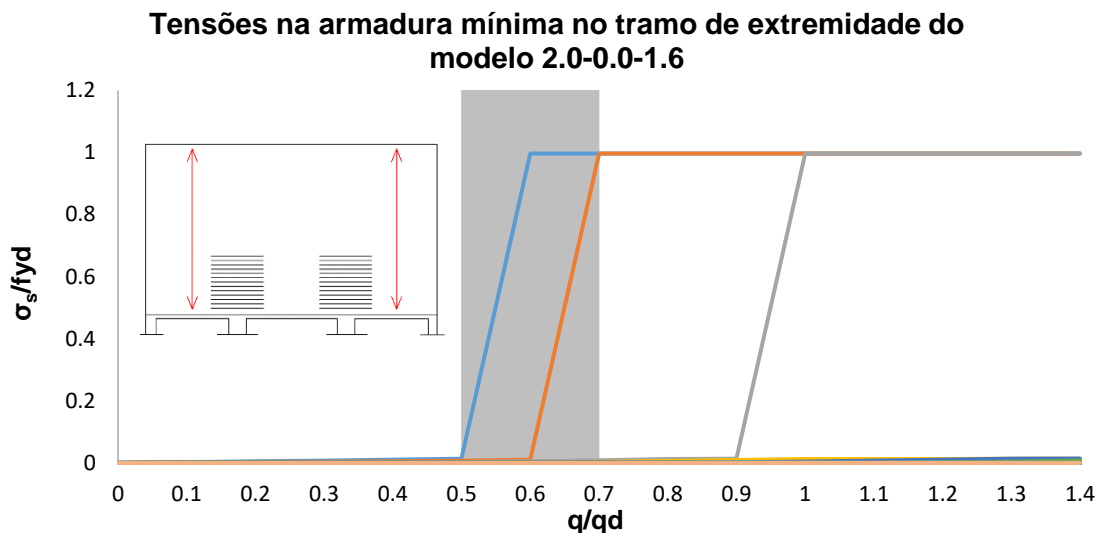


Os modelos 1.4-0.4-1.3 e 2.0-0.0-1.6 apresentam resultados bastante bons no que diz respeito ao comportamento em serviço. O modelo 2.0-0.0-1.6 apresenta tensões entre 97MPa e 106MPa. Já o modelo 1.4-0.4-1.3 apresenta valores entre os 98MPa e 135MPa. O modelo 0.5-2.6-0.76 representa uma situação limite, com tensões entre 240MPa e 310MPa.

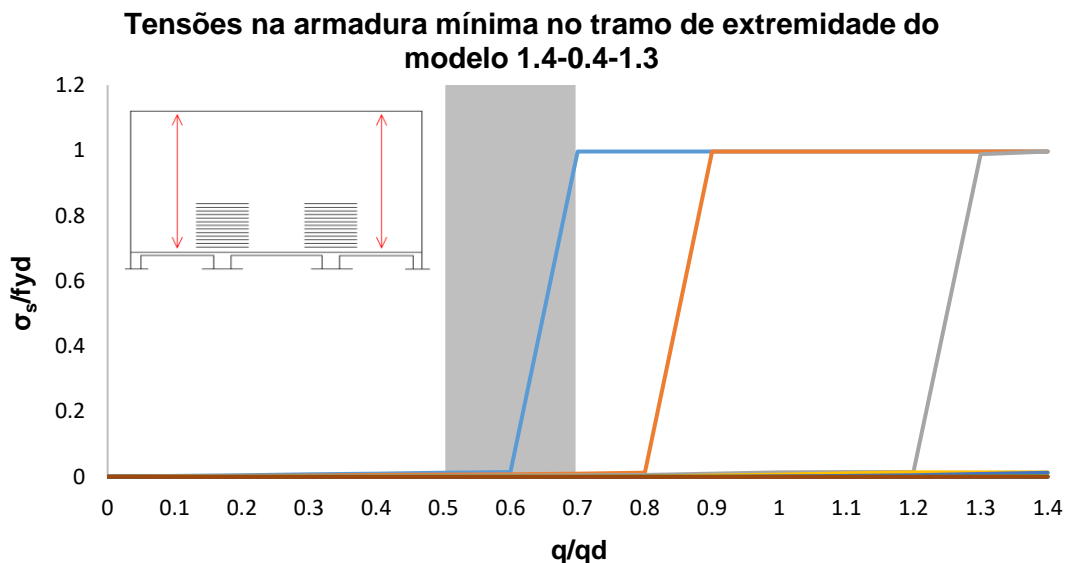
Em contrapartida os modelos com menos quantidade de armadura nesta zona, modelos 0.0-6.4-0.25 e 0.0-7.0-0.0 apresentam níveis de tensões elevados na zona de serviço, podendo levar à formação de fendas inaceitáveis.

Em suma, apenas o modelo de referência e os modelos 0.5-2.6-0.76, 1.4-0.4-1.3 e 2.0-0.0-1.6 apresentam resultados aceitáveis quanto ao nível de tensões em serviço e para as armaduras inferiores do tramo de extremidade.

Foi igualmente efetuada uma análise à armadura mínima posicionada acima da armadura de reforço para os modelos 0.5-2.6-0.76, 1.4-0.4-1.3 e 2.0-0.0-1.6. (Gráficos 15, 16 e 17).

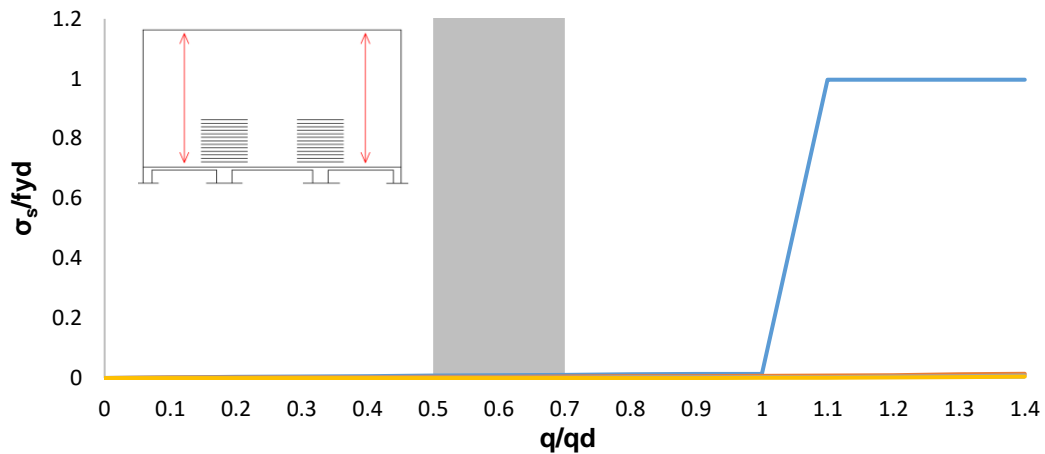


**Gráfico 15** - Tensões na armadura mínima do tramo de extremidade do modelo 2.0-0.0-1.6.



**Gráfico 16** - Tensões na armadura mínima no tramo de extremidade do modelo 1.4-0.4-1.3.

**Tensões na armadura mínima no tramo de extremidade do modelo 0.5-2.6-0.76**

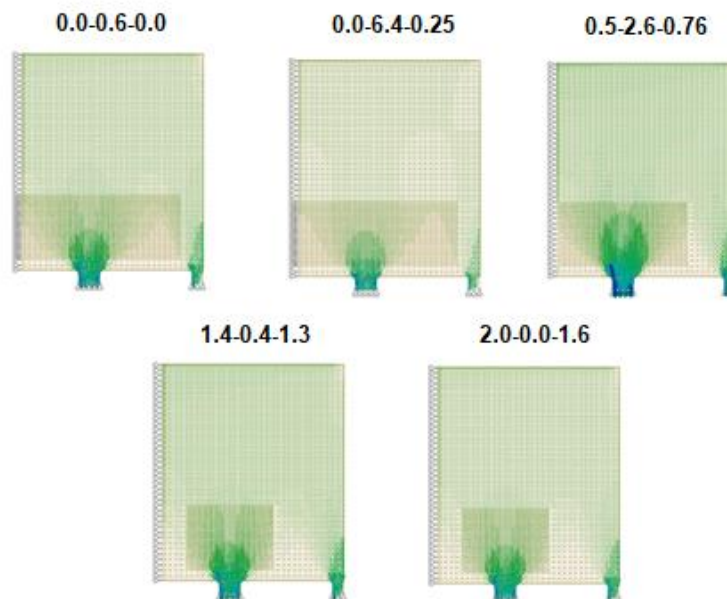


**Gráfico 17** - Tensões na armadura mínima no tramo de extremidade do modelo 0.5-2.6-0.76.

Ocorre a fendilhação ao nível das duas primeiras armaduras (mínimas) colocadas acima da armadura de reforço, para o modelo 2.0-0.0-1.6 e apenas um nível de armadura (mínima) para o modelo 1.4-0.4-1.3. Quanto ao modelo 0.5-2.6-0.76 apenas no incremento de carga  $q/q_d=1$  ocorre a fendilhação uma camada de armadura colocada acima da armadura de reforço.

Estas fendilhações ocorrem apenas depois da fendilhação do tirante a meio vão na zona inferior.

Na figura 46 estão representadas as tensões no betão para os diferentes modelos nos incrementos de carga  $q/q_d=1$ . Em anexo (Figuras B-1 a B-5) estão representadas as tensões para os incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$



**Figura 46** - Tensões no betão nos modelos com braços elásticos para o incremento de carga  $q/q_d=1$ .

### 3.2.4. Modelos com Braço único ( $z = 0.7L$ )

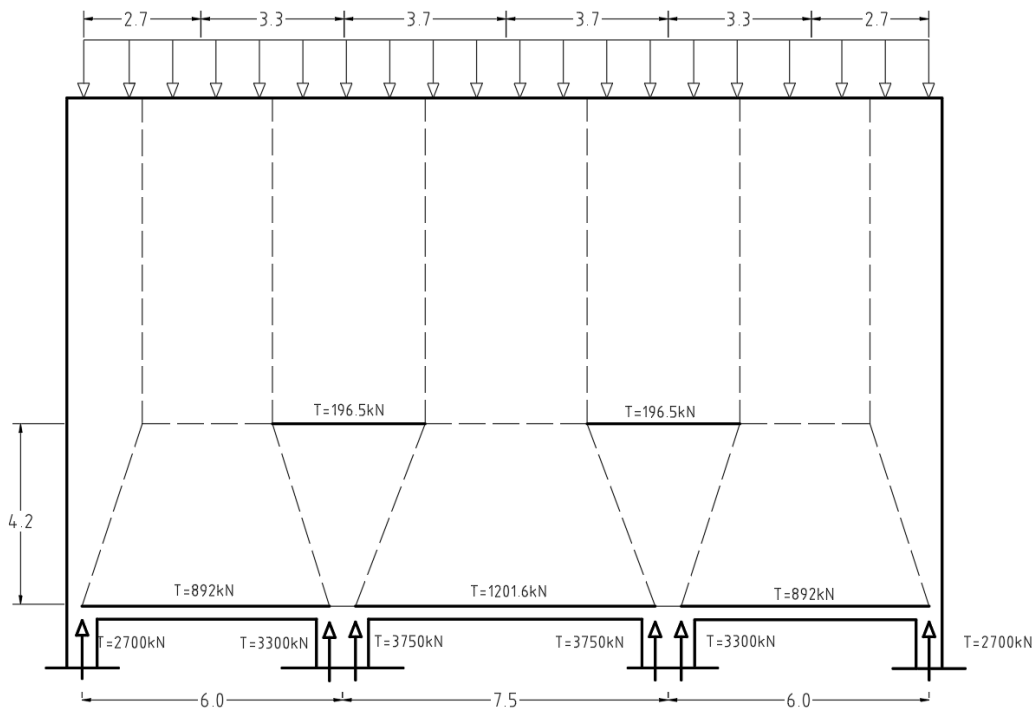
No segundo conjunto de modelos analisados consideram-se os braços a meio vão e no apoio intermédio iguais a  $0.7L$ , ou seja  $4.2\text{m}$ . Desta forma a armadura a colocar nos apoios intermédios é distribuída ao longo de uma altura maior em relação à análise anterior. Tal como nos modelos dos capítulos anteriores, a partir da imposição do valor da reação no apoio de extremidade facilmente se obtém os valores das resultantes dos tirantes e das escoras. Foram dimensionados 5 modelos:

- **Reação no apoio de extremidade:  $0.5pl$**

O modelo correspondente à imposição de  $0.5pl$  como reação no apoio de extremidade corresponde ao comportamento de vigas simplesmente apoiadas nos vários tramos. Dado que não há reforço de armadura nos apoios intermédios e o braço a meio vão é igual ao braço considerado nos modelos da categoria anterior, este modelo é igual ao modelo  $2.0-0.0-1.6$  representado no capítulo 3.2.3.1.

- **Reação no apoio de extremidade:  $0.45pl$**

Para este modelo a reação no apoio de extremidade é equivalente a  $2700\text{ kN}$  e o MET está representado na figura 47.

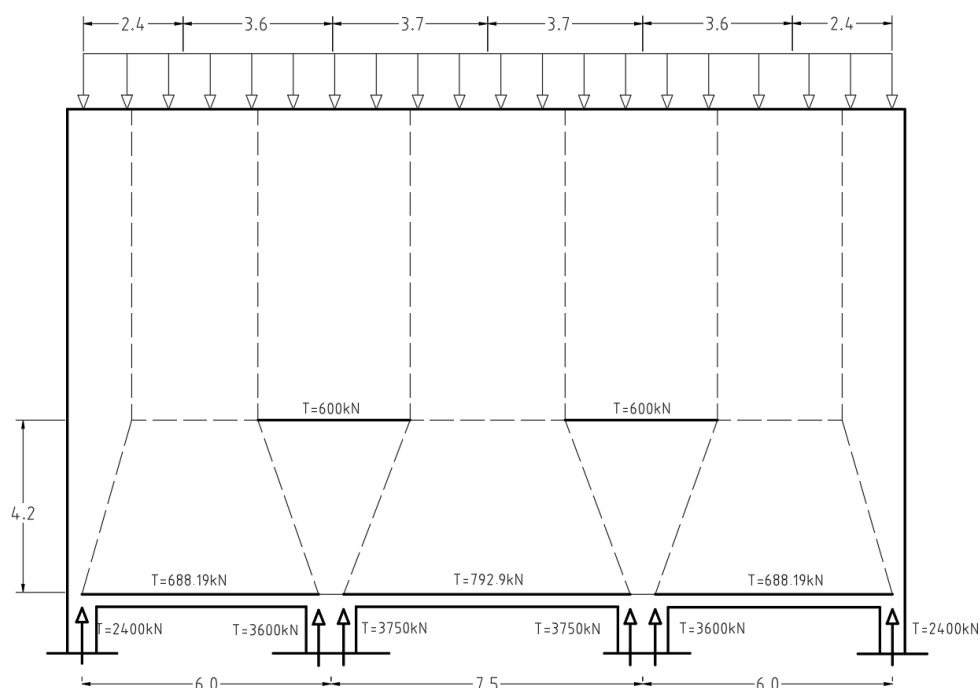


**Figura 47** - MET para o modelo com ambos os braços  $0.7L$  e reação no apoio de extremidade  $0.45pl$ .

A quantidade de armadura mínima é igual à utilizada nos modelos da categoria anterior ( $\rho=0.2\%$ ). Na zona dos apoios intermédios a quantidade de armadura distribuída originada pela força no tirante de  $195.5\text{kN}$  é inferior à armadura mínima, logo é desnecessária a adição de armadura nesta zona. Assim sendo, o modelo é semelhante ao modelo  $1.4-0.4-1.3$  da categoria anterior.

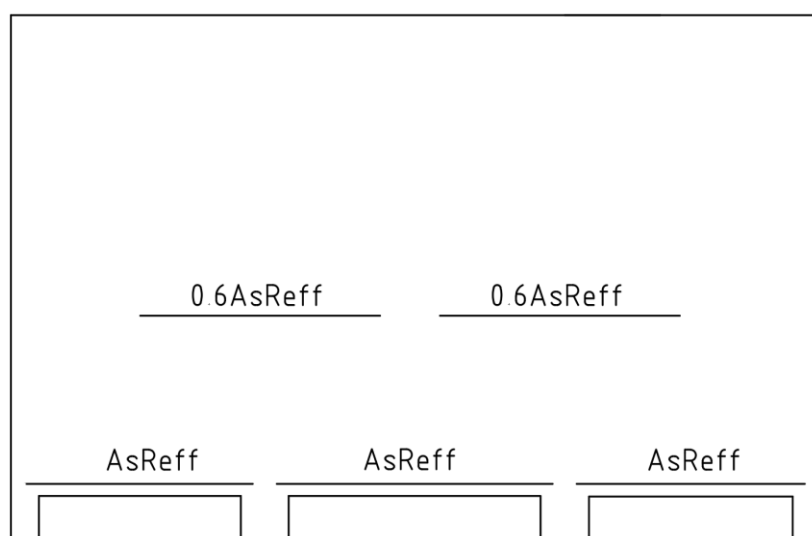
○ **Reação no apoio de extremidade: 0.4pl**

Este modelo tem as reações idênticas ao modelo de referência, no entanto os braços são diferentes. O MET associado a este modelo está representado na figura 48.



**Figura 48** - MET para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.4pl.

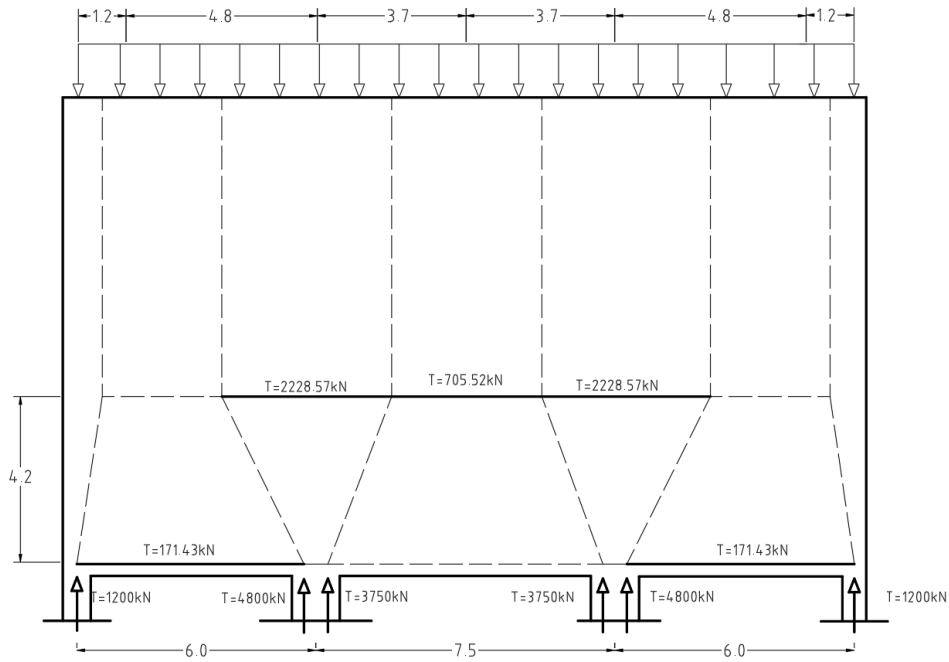
A quantidade de armadura a colocar nos apoios intermédios é inferior à quantidade de armadura mínima, logo é dispensável neste modelo. A armadura colocada nas zonas inferiores a meio vão dos tramos intermédio e de extremidade é semelhante à armadura colocada no modelo de referência, isto é,  $4\varnothing 25$  e  $5\varnothing 20$ , respetivamente. A quantidade de armadura calculada está representada na figura 49 e a sua pormenorização em anexo (Figura A-6). A este modelo a nomenclatura atribuída é 1.0-0.6-1.0.



**Figura 49** – Quantidade de armadura calculada para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.4pl em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros)

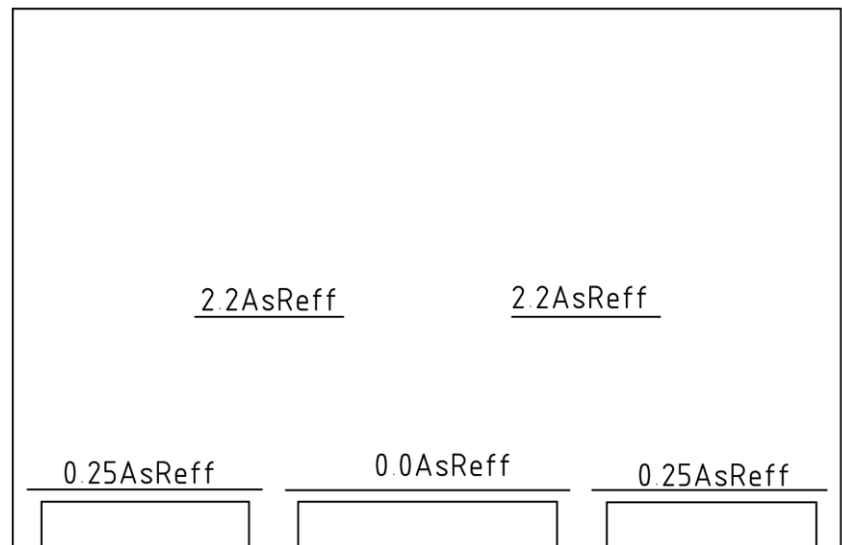
○ **Reação no apoio de extremidade: 0.25pl**

O MET para o modelo está representado na figura 50.



**Figura 50** - MET para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.25pl.

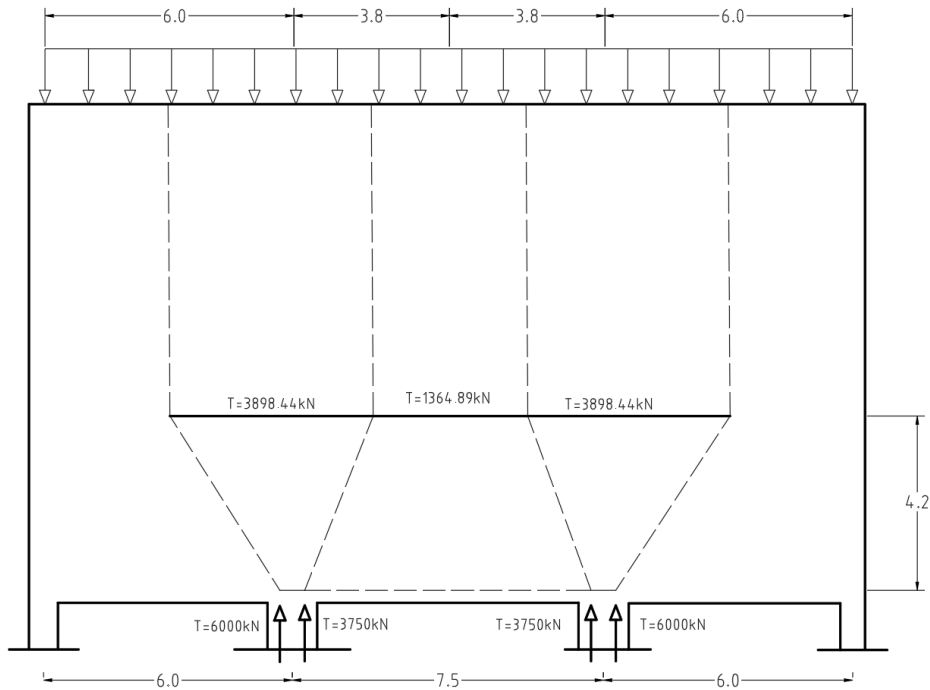
No tramo intermédio, na zona inferior ocorrem compressões e as trações são inteiramente suportadas pela armadura mínima. No apoio intermédio a armadura é dada por  $A_s(cm^2) = \frac{2228.57}{43.5} = 51.23cm^2$  equivalente a uma armadura distribuída de  $6.1cm^2/m$ . Foi adicionado um reforço de  $\varnothing 6//0.30$  à armadura mínima de  $\varnothing 10//0.30$ . A meio vão dos tramos de extremidade a armadura é dada por  $A_s(cm^2) = \frac{171.43}{43.5} = 3.94cm^2$  e foram escolhidos  $2\varnothing 16$ . A quantidade de armadura calculada está representada na figura 51 e a sua pormenorização em anexo (Figura A-7). A nomenclatura do modelo é 0.0-2.2-0.25.



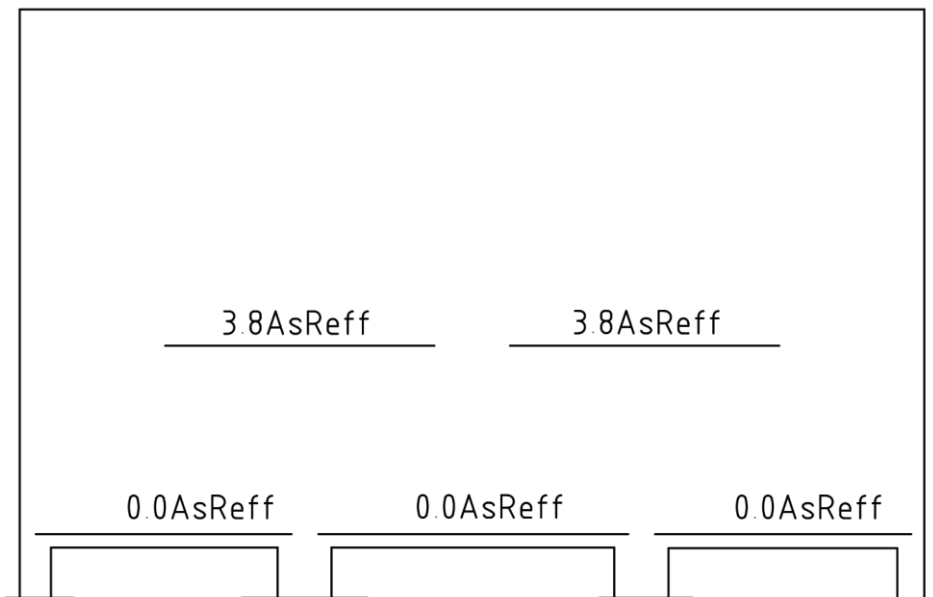
**Figura 51** - Quantidade de armadura do modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade 0.25pl em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros)

○ **Reação no apoio de extremidade: 0**

No apoio intermédio, para o MET representado na figura 52, a armadura é  $A_s(cm^2) = \frac{3898.44}{43.5} = 89.57cm^2$ , equivalente a 10.86 cm<sup>2</sup>. A meio vão dos tramos intermédio e de extremidade é apenas colocada armadura mínima. Na figura 53 está representada a quantidade de armadura calculada em relação ao modelo de referência e em anexo (Figura A-8) a sua pormenorização. A nomenclatura atribuída a este modelo é 0.0-3.8-0.0.



**Figura 52** - MET para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade nula.



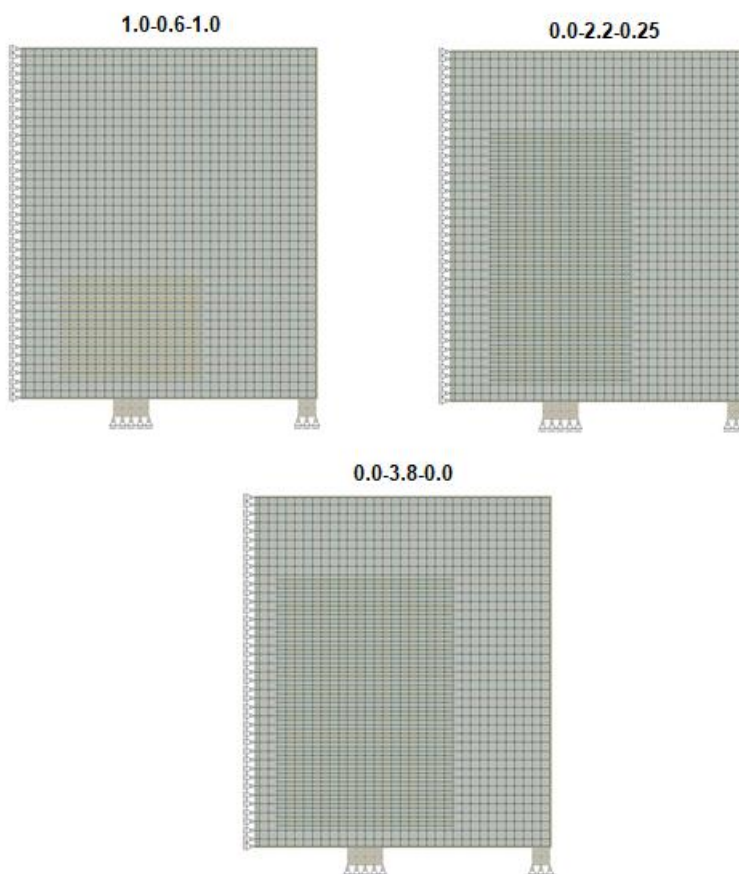
**Figura 53** - Quantidade de armadura calculada para o modelo com ambos os braços 0.7L e reação no apoio de extremidade nula em relação ao modelo de referência. (Dimensões em metros)

**Tabela 3** – Quantidade de armadura e nomenclatura atribuída aos modelos com braços iguais.  
 (\*) – Valor inferior à área de armadura mínima.

Valor da Reação	Tramo Intermédio	Apoio Intermédio	Tramo de Extremidade	Nomenclatura
<b>0</b>	0.0A <sub>s,reff</sub> (*)	3.8A <sub>s,reff</sub>	0.0A <sub>s,reff</sub> (*)	0.0-3.8-0.0
<b>0.2pl</b>	0.0A <sub>s,reff</sub> (*)	2.2A <sub>s,reff</sub>	0.25A <sub>s,reff</sub>	0.0-2.2-0.25
<b>0.4pl</b>	A <sub>s,reff</sub>	0.6A <sub>s,reff</sub> (*)	A <sub>s,reff</sub>	1.0-0.6-1.0
<b>0.45pl</b>	1.4A <sub>s,reff</sub>	0.2A <sub>s,reff</sub> (*)	1.3A <sub>s,reff</sub>	1.4-0.2-1.3
<b>0.5pl</b>	2.0A <sub>s,reff</sub>	0.0A <sub>s,reff</sub> (*)	1.6A <sub>s,reff</sub>	2.0-0.0-1.6

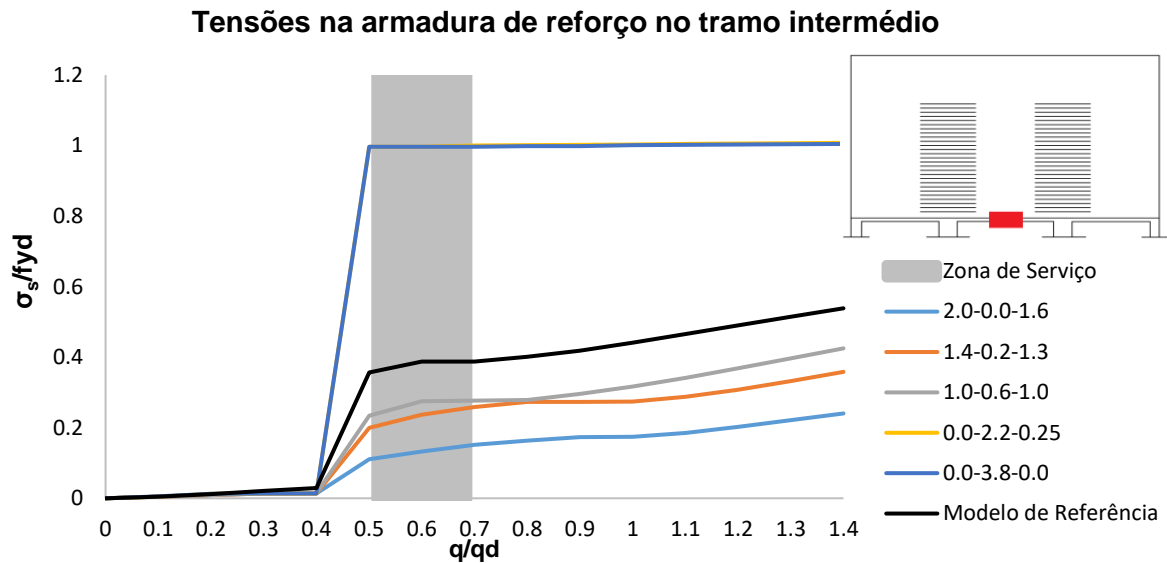
Os modelos 2.0-0.0-1.6 e 1.4-0.2-1.3 são semelhantes aos modelos utilizados na categoria anterior, no entanto a análise no apoio intermédio envolve uma maior altura de distribuição da armadura.

A modelação no EvalS dos modelos com braço único ( $z=0.7L$ ) está representada na figura 54.



**Figura 54** - Modelação dos modelos com braço único equivalente a 0.7L no EvalS

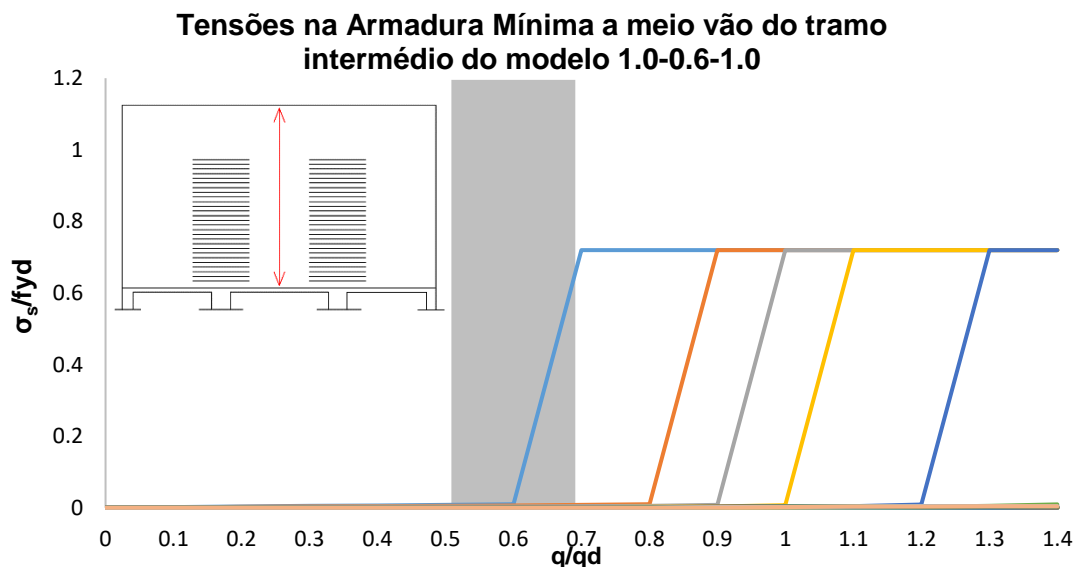
Foi feita uma análise às mesmas zonas analisadas na categoria anterior. No gráfico 18 está representado o andamento das tensões na armadura inferior a meio vão do tramo intermédio.



**Gráfico 18** - Andamento das tensões a meio vão do tramo intermédio para os modelos com 0.7L de braço.

Para além dos modelos 2.0-0.0-1.6 e 1.4-0.2-1.3 e do modelo de referência que já haviam sido analisados, o modelo 1.0-0.6-1.0, apresenta valores adequados em serviço (tensões entre 102MPa e 120MPa entre  $0.5 < q/q_d < 0.7$ ). Já os modelos 0.0-2.2-0.25 e 0.0-3.8-0.0 sem qualquer armadura de reforço nesta zona, para além da armadura mínima, apresentam valores de tensões demasiado elevadas para as ações em serviço.

No gráfico 19 está representado o andamento das tensões na armadura mínima colocada acima da armadura de reforço a meio vão do tramo intermédio. Como era de esperar ao longo do carregamento ocorre uma fendilhação gradual acima desta zona, principalmente depois da fendilhação na zona inferior da viga parede.

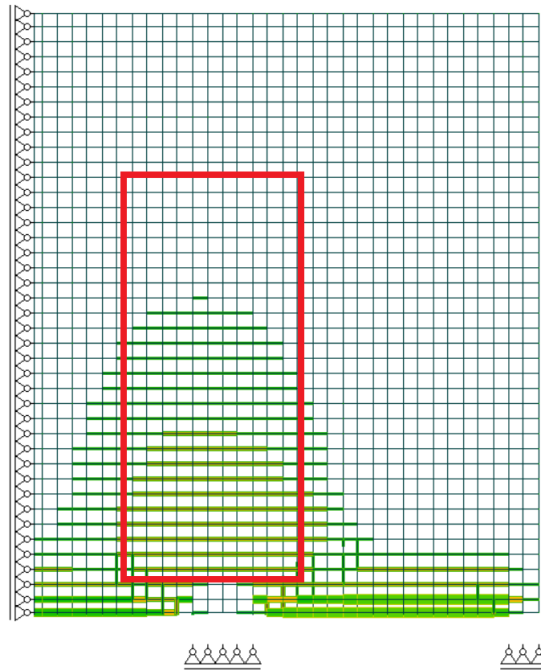


**Gráfico 19** - Tensões na armadura mínima a meio vão do tramo intermédio do modelo 1.0-0.6-1.0.



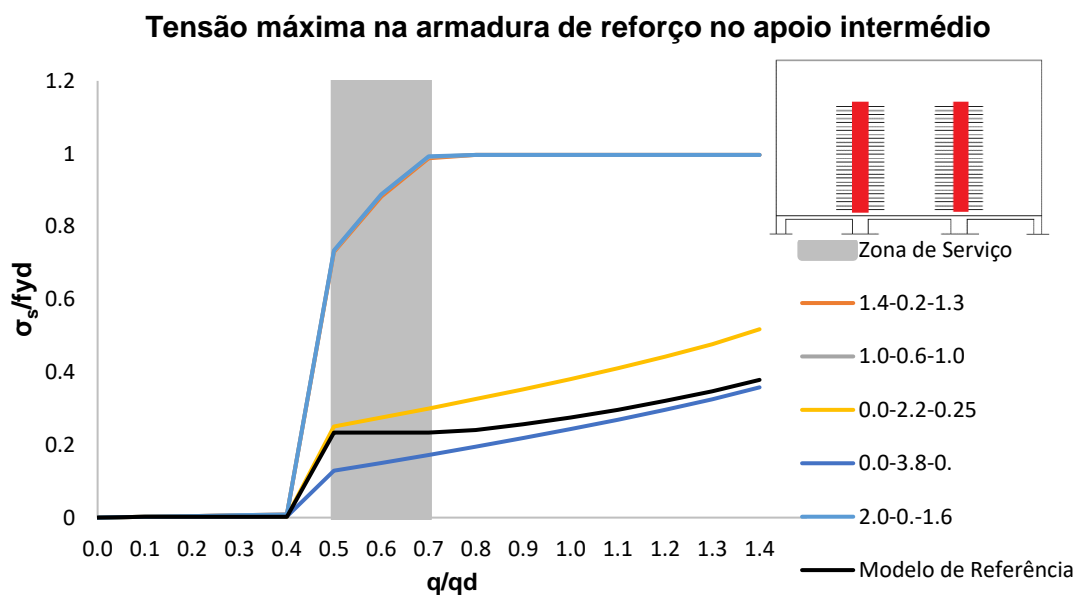
A fendilhação ao nível da primeira armadura mínima colocada acima da armadura de reforço ocorre no incremento de carga  $q/q_d=0.6$ , a única em zona de serviço.

Visto que para um braço de  $0.7L$  a armadura de reforço é distribuída ao longo de uma altura maior, as tensões geradas na mesma são pouco uniformes. Como se pode observar na figura 55 há uma maior concentração de tensões da zona inferior da armadura distribuída.



**Figura 55** – Representação qualitativa das tensões na zona da armadura de reforço no apoio intermédio.

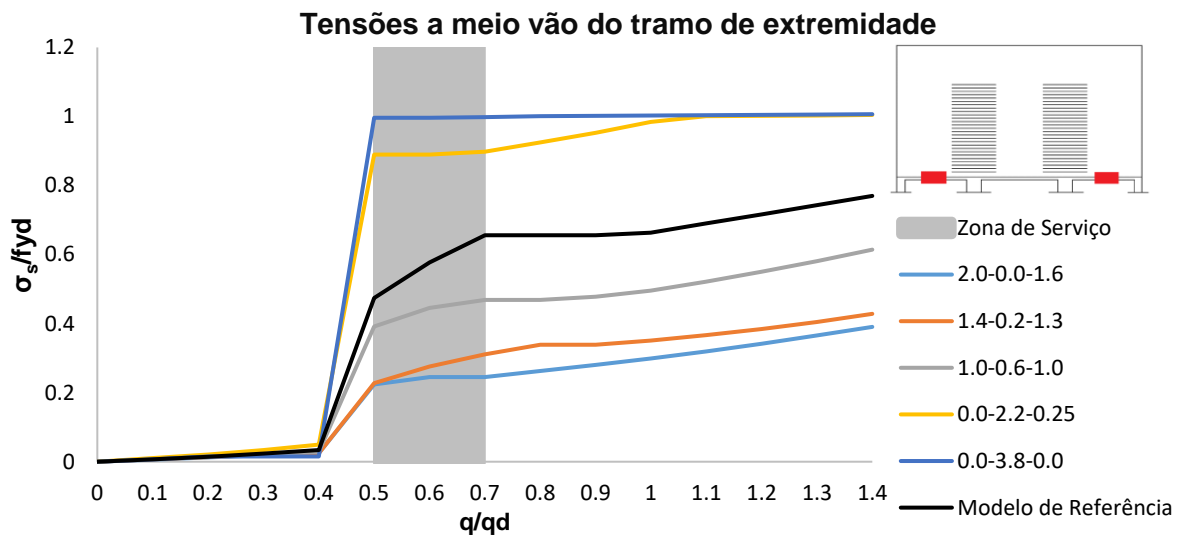
Desta forma, é pouco prudente considerar as tensões médias para avaliar o comportamento em serviço, pelo que se analisam as tensões máximas que ocorrem nas armaduras de reforço (Gráfico 20).



**Gráfico 20** - Tensão máxima na armadura de reforço no apoio intermédio para os modelos com braços  $0.7L$ .

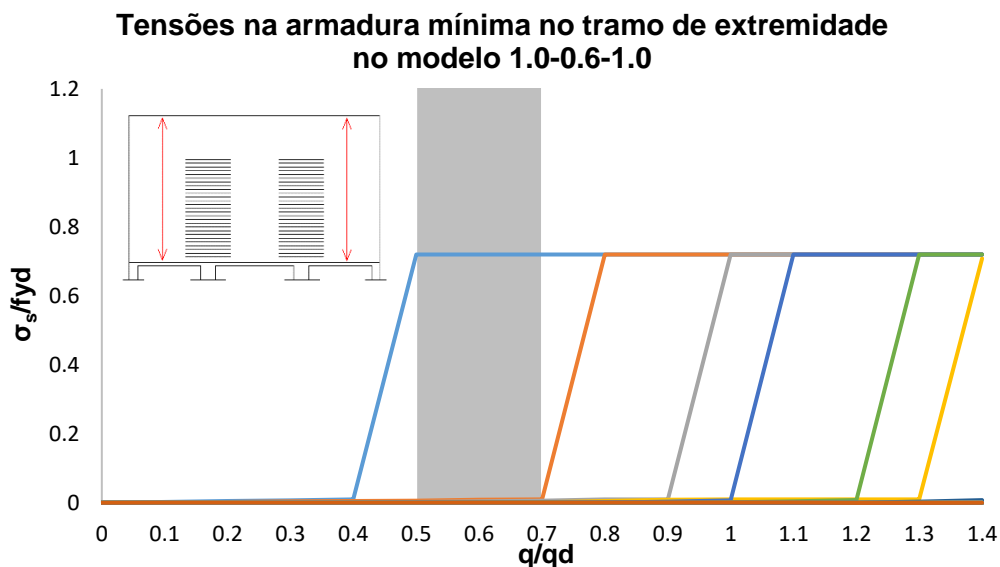
Os modelos 0.0-3.8-0.0 e 0.0-2.2-0.25, com tensões entre 56MPa e 75MPa e 109MPa e 130MPa, respetivamente, representam valores de tensões adequados para o comportamento em serviço. Já os modelos 1.4-0.2-1.3, 1.0-0.6-1.0 e 2.0-0.0-1.6, modelos que têm apenas armadura mínima no apoio intermédio, apresentam tensões demasiado elevadas, que podem indiciar um inadequado comportamento em serviço.

Quanto às tensões a meio vão do tramo de extremidade (Gráfico 21), para além dos modelos 2.0-0.0-1.6, 1.4-0.2-1.3 e do modelo de referência, já analisados, também o modelo 1.0-0.6-1.0 apresenta valores aceitáveis de tensões em serviço (variação entre 170MPa e 204MPa). Já os modelos 0.0-2.2-0.25 e 0.0-3.8-0.0 apresentam tensões elevadas em serviço.



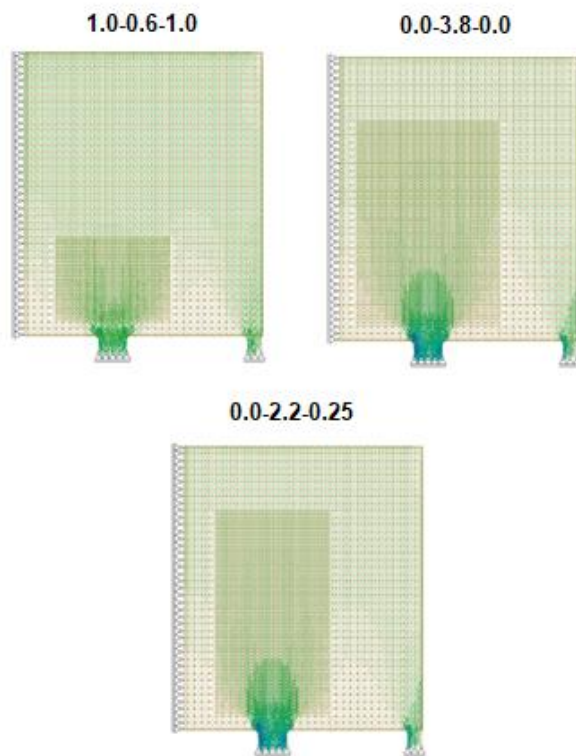
**Gráfico 21** – Tensões a meio vão do tramo de extremidade nos modelos com braço 0.7L.

No modelo 1.0-0.6-1.0, pode-se observar a fendilhação das armaduras mínimas colocadas acima da armadura de reforço, principalmente após a fendilhação ao nível da zona inferior (Gráfico 22).



**Gráfico 22** – Tensões na armadura mínima do tramo de extremidade no modelo 1.0-0.6-1.0.

Na figura 56 estão representadas as tensões no betão para o incremento de carga  $q/q_d=1$  nos modelos com braço único ( $z=0.7L$ ). Em anexo (Figuras B-6 a B-8) estas tensões estão representadas em dois níveis de carga diferentes.



**Figura 56** - Tensões no betão, nos modelos 1.0-0.6-1.0, 0.0-3.8-0.0 e 0.0-2.2-0.25 para o incremento de carga  $q/q_d=1$ .

### 3.2.5. Síntese dos resultados principais

A análise às tensões nas armaduras para as cargas de serviço é uma forma possível, e em geral apropriada, para a avaliação do comportamento da estrutura em serviço, visto que estão diretamente relacionadas com a abertura de fendas. Quanto às análises efetuadas, nos modelos com os braços associados à trajetória elástica, os modelos com 1.4As,reff, 2As,reff e 0.5As,reff apresentam tensões aceitáveis em serviço para o meio vão do tramo intermédio. Já os modelos em que apenas foi colocada armadura mínima nesta zona (0.1As,reff), as tensões apresentadas em serviço são muito elevadas, conduzindo a grandes aberturas de fendas. Para esta zona, em termos de reações no apoio de extremidade pode-se definir como intervalo aceitável de dimensionamento, a adoção de valores entre 0.35pl e 0.5pl. Nos modelos cujo braço no apoio é semelhante ao braço a meio vão dos tramos intermédio e de extremidade ( $z=0.7L$ ) este intervalo é mais curto, sendo aceitável a adoção de valores entre 0.4pl e 0.5pl (Tabela 4).

**Tabela 4** – Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço no tramo intermédio.

<b>Parâmetros</b>	<b>Modelos com Braços Associados à Trajetória Elástica</b>	<b>Modelos com Braço único (<math>z = 0.7L</math>)</b>
<b>Reação no apoio de extremidade</b>	0.35pl-0.5pl	0.4pl-0.5pl
<b>Quantidade de armadura</b>	0.5As,reff -2As,reff	As,reff -2As,reff

No que diz respeito à zona dos apoios da viga parede contínua, nos modelos com braços associados à trajetória elástica, os modelos com 2.6As,reff, 6.4As,reff e 7As,reff, nesta zona apresentam níveis de tensão adequados em serviço. Os modelos em que se adotou apenas a armadura mínima sobre o apoio intermédio, verificou-se que os resultados obtidos indiciam um mau comportamento em serviço. Nos modelos onde se adotou o mesmo braço no apoio e a meio vão, os valores de tração obtidos nos tirantes são inferiores, i.e., as quantidades de armadura a colocar para as mesmas variações na reação de apoio no tramo de extremidade são inferiores. Nesta categoria obteve-se resultados aceitáveis para os modelos com 2.2As,reff e 3.8As,reff. Estes resultados estão resumidos na tabela 5.

**Tabela 5** - Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço no apoio intermédio.

<b>Parâmetros</b>	<b>Modelos com Braços Associados à Trajetória Elástica</b>	<b>Modelos com Braço único (<math>z = 0.7L</math>)</b>
<b>Reação no apoio de extremidade</b>	0pl-0.4pl	0pl-0.2pl
<b>Quantidade de armadura</b>	As,reff - 7As,reff	As,reff -3.8As,reff

Quanto ao tramo de extremidade os intervalos de valores aceitáveis para a reação no apoio de extremidade são semelhantes aos intervalos retirados para o tramo intermédio. Para os modelos com braço associado às trajetórias elásticas obteve-se um comportamento adequado em serviço para os modelos com 0.76As,reff, 1.3As,reff e 1.6As,reff. Nos modelos com o braço único apenas os modelos com 1.3As,reff e 1.6As,reff apresentaram resultados positivos.

**Tabela 6** - Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço no tramo de extremidade.

<b>Parâmetros</b>	<b>Modelos com Braços Associados à Trajetória Elástica</b>	<b>Modelos com Braço único (z = 0.7L)</b>
<b>Reação no apoio de extremidade</b>	0.35pl-0.5pl	0.4pl-0.5pl
<b>Quantidade de armadura</b>	0.76As,reff – 1.6As,reff	1.3As,reff -1.6As,reff

Combinando estes intervalos, os únicos modelos que apresentam resultados positivos em todas as zonas acima apresentadas são os modelos de referência e o modelo 0.5-2.6-0.76 com braços associados à trajetória elástica. Os intervalos de valores estão representados na tabela 7.

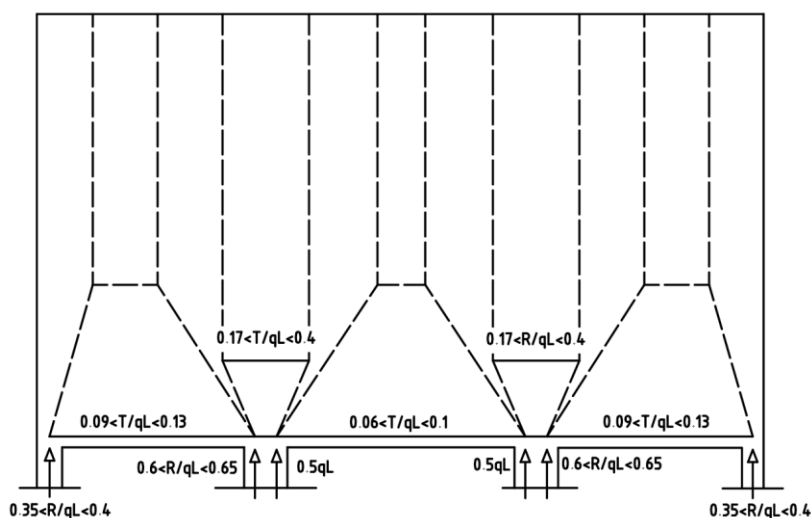
**Tabela 7** - Intervalo de valores para o comportamento adequado em serviço da viga parede contínua.

<b>Parâmetros</b>	<b>Modelos com Braços Associados à Trajetória Elástica</b>	<b>Modelos com Braço único (z = 0.7L)</b>
<b>Reação no apoio de extremidade</b>	0.35pl-0.4pl	-

Em suma, apesar de todos os modelos terem atingido a carga de dimensionamento, grandes níveis de redistribuição de tensões internas, no modelo de dimensionamento, não são aconselháveis. Como era de esperar, nos modelos com pouca quantidade de reforço de armadura nos apoios, as tensões em serviço, revelaram-se elevadas em diversas situações. O mesmo acontece a meio vão nos modelos com pouca quantidade de armadura inferior.

A adoção de um braço único, igualando o braço nos apoios intermédios e a meio vão, não apresenta resultados adequados em serviço. No apoio intermédio a armadura é distribuída ao longo de uma altura maior em comparação aos modelos com os braços associados à trajetória elástica. Desta forma a quantidade de armadura a colocar para os mesmos valores de tração é inferior. Por outro lado, devido à subida do braço, a tração resultante no apoio intermédio é inferior. Estes dois fenómenos resultam em pouca quantidade de armadura a reforçar nessa zona e conseqüentemente num mau comportamento em serviço.

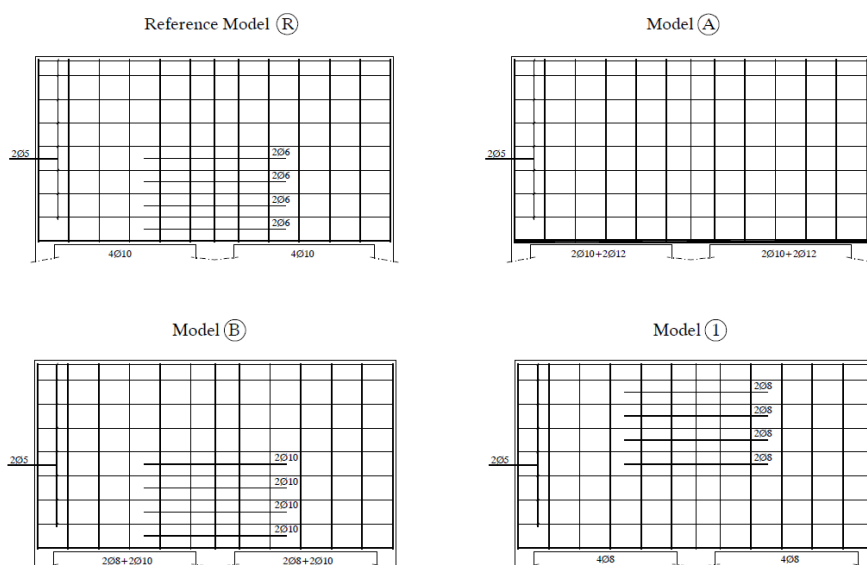
Os limites aceitáveis a estabelecer nas reações nos apoios de extremidade e intermédios para um comportamento aceitável em todas as zonas da viga parede tendo como referência os modelos testados nesta dissertação, estão resumidos na figura 57.



**Figura 57** - Limites de redistribuição segundo as análises efetuadas.

### 3.2.6. Comparação com Resultados de outros autores

Lourenço (2010), através dos modelos de campos de tensões adaptativos (MCTA) já referido no capítulo anterior, avalia diversos modelos de escoras e tirantes de uma viga parede contínua. Fazendo variar a quantidade de armadura e o braço no apoio intermédio, avaliou o comportamento em serviço, assumindo várias possíveis redistribuições internas, procedimento também seguido nesta dissertação. Para além de um modelo diretamente associado à trajetória elástica (Modelo R), foram concebidos dois modelos (Modelos A e B) com aproximadamente metade e o dobro da área de armadura no apoio intermédio, em relação ao modelo R, respetivamente, e ainda um modelo com o braço no apoio igual ao braço a meio vão ( $z=0.7L$ ) (Figura 58).



**Figura 58** – Alguns modelos de vigas parede contínuas analisados por Lourenço (2010). (Adaptado de Lourenço, 2010)

Lourenço (2010) concluiu com as suas análises que, para vigas parede com pouca armadura de reforço no apoio intermédio (Modelo A), as tensões em serviço são elevadas podendo haver a abertura de fendas consideráveis. Para o limite superior das cargas de serviço foram obtidas tensões com cerca de 350MPa. A meio vão todos os modelos apresentaram uma resposta adequada em serviço. Em comparação com os resultados obtidos neste trabalho, à exceção do modelo 1, os resultados obtidos por Lourenço (2010) vão de encontro ao intervalo sugerido nesta dissertação para o comportamento adequado dos modelos a meio vão.

Ao contrário do que foi obtido nesta dissertação, o dimensionamento do modelo com  $z=0.7L$  no apoio intermédio não levantou problemas. De facto, os resultados apresentados por Lourenço (2010) apresentam uma resposta adequada para cargas de serviço, à semelhança do que aconteceu com os modelos com braço associados às trajetórias elásticas. É de reparar que no modelo 1, a armadura no apoio está distribuída ao longo de uma altura menor em comparação à altura considerada nesta dissertação.

## **4. Considerações finais e desenvolvimentos futuros**

### **4.1. Considerações finais**

No processo de dimensionamento de zonas de descontinuidade através de modelos de escoras e tirantes podem considerar-se diversos modelos equilibrados para a verificação da segurança de uma determinada região de betão estrutural. No entanto, nem todos traduzem um bom comportamento da estrutura, principalmente em serviço.

Neste sentido, vários autores sugerem metodologias de seleção de modelos de escoras e tirantes adequados para estruturas com zonas de descontinuidade. O objetivo desta dissertação consistiu em analisar diversos modelos de escoras e tirantes de uma viga parede contínua, com carga uniformemente distribuída no topo. Utilizaram-se modelos de escoras e tirantes, simulando diversas redistribuições internas possíveis, para obter a pormenorização das armaduras das vigas parede. Posteriormente, foi efetuada uma análise de elementos finitos não-lineares com cada uma das distribuições de armaduras e avaliado, em particular, o comportamento em serviço das vigas parede assim dimensionadas. O principal objetivo foi identificar e quantificar a possibilidade de variação na escolha do modelo de dimensionamento sem comprometer o comportamento em serviço dos elementos analisados.

O modelo de referência, foi o indicado na bibliografia, essencialmente baseado na distribuição elástica de tensões e foram testadas diversas variações de quantidades de armaduras no vão e no apoio (até situações extremas, desde a consideração de vigas simplesmente apoiadas independentes e, portanto, apenas com armadura no vão, até à situação em que o tramo de extremidade apresenta um comportamento semelhante ao de uma consola e, conseqüentemente, apenas com armadura sobre os apoios). Nas zonas onde não foi calculada armadura de reforço foi disposta a armadura mínima regulamentar.

Como critério de avaliação do comportamento em serviço foram analisadas as tensões nas armaduras dos diversos modelos, para as cargas de serviço, pois as tensões estão diretamente associadas à abertura de fendas. No geral, concluiu-se que a consideração de grandes redistribuições em relação ao modelo de referência, pode conduzir a níveis de tensão demasiado elevados e, conseqüentemente, a um inadequado comportamento em serviço. No entanto, existe uma significativa liberdade de escolha do modelo de dimensionamento.

Neste contexto, para este caso particular sugeriu-se e apresentou-se a variabilidade possível nos modelos de escoras e tirantes de dimensionamento da região, que podem ser usados sem comprometer o comportamento em serviço, fornecendo assim regras práticas de verificação indireta dos Estados Limite de Utilização. Para redistribuições superiores deverá ser analisado, explicitamente, o comportamento em serviço com modelos apropriados.

Por fim, refere-se que esta dissertação envolveu o estudo paramétrico de uma viga parede contínua e insere-se num conjunto de estudos efetuados para outras regiões de descontinuidade que



são consideradas com típicas, i.e., que ocorrem em diversas situações práticas e reais de projeto. Tal como se procurou efetuar para o caso em análise, o objetivo final será fornecer regras simples e práticas para os engenheiros de estruturas de modo a utilizarem os modelos de escoras e tirantes e/ou modelos de campos de tensões no processo de modelação, análise e dimensionamento e minimizar a dúvida se o modelo que estão a adotar será adequado, garantindo a segurança ao Estado Limite Último e um adequado comportamento em serviço.

## **4.2. Desenvolvimentos futuros**

Para além da extensão, anteriormente referida, do procedimento de avaliação de modelos proposto a outras regiões de descontinuidade, julga-se que será importante melhorar a interpretação de resultados do programa de análise não linear utilizado, sobretudo no que se refere à sua ligação ao modelo de escoras e tirantes correspondente.

Efetivamente, uma das limitações das análises efetuadas foi a incapacidade de determinar com exatidão a variação do braço dos modelos, ao longo do carregamento. Através da análise com elementos finitos as tensões obtidas estão associadas, em parte, a efeitos de compatibilidade, tornando difícil dissociá-los dos esforços unicamente gerados pelo equilíbrio do modelo, pelo que não foi possível realizar completamente a correspondência entre o modelo de elementos finitos e o modelo de escoras e tirantes de dimensionamento.

## Bibliografia

ANDERHEGGEN, E – Finite Element Analysis Rigid-Ideal-Plastic Material Behavior, March 1977

BENDSOE, M.P.; SIGMUND, O – Topology Optimization, Theory, Methods and Applications, 2003

BIONDINI, F; BONTEMPI, F; MALERBA, P - Stress path adapting Strut-and-Tie models in cracked and uncracked R.C. elements, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 12, No. 6 (2001) 685-698, December 2001.

CAMARA, J. N; COSTA, A; ALMEIDA, J; JÚLIO, E; ALFAIATE, J – Estruturas de Betão – Folhas de Apoio as Aulas, Lisboa

EUROCODE 2 EN 1992-1-1 Design of concrete structures – Part 1.1: General rules and rules for buildings, December 2004

FERREIRA, M.; ALMEIDA, J.; LOURENÇO, M. - Modelling structural concrete with strut-and-tie model combined with 2D finite elements - a model factor for the assessment of strut-and-tie models, fib Symposium 2017, High Tech Concrete: Where Technology and Engineering Meet, Maastricht, June 12-14 2017, pp. 1191-1199

FIP Practical Design of Structural Concrete, September 1999

KOSTIC, N – Computer Based Development of Stress Fields, 6th International PhD Symposium in Civil Engineering, Zurich, August 23-26, 2006

LIANG, QING QUAN; XIE, YI MIN; STEVEN, GRANT PETRICE - Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures Using an Evolutionary Procedure, ACI STRUCTURAL JOURNAL, Title no. 97-S36, March-April 2000

LOURENÇO, M - Adaptive Stress Field Models for Structural Concrete, Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Fevereiro 2010

LOURENÇO, M; ALMEIDA, J - Adaptive Stress Field Models: Assessment of Design Models, ACI STRUCTURAL JOURNAL, Title no. 110-S09, January-February 2013

LOURENÇO, M; ALMEIDA, J - Adaptive Stress Field Models: Formulation and Validation, ACI STRUCTURAL JOURNAL, Title no. 110-S08, January-February 2013

VITONE, A; PALMISANO, F; VITONE, C - Load Path Method (LPM) in Detailing Design, Proceedings of the 2nd International Congress, Session 3 – Modelling and design, Naples, Italy, June 5-8, 2006.

MARTI, P – Theory of Structures, Fundamentals Framed Structures Plates and Shells, Zürich, February 2013.

MUTTONI, A; SCHWARTZ, J; THÜRLIMANN, B – Design of Concrete Structures with Stress Fields, Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1997.

RUIZ, MIGUEL FERNÁNDEZ; MUTTONI, A - On Development of Suitable Stress Fields for Structural Concrete, ACI STRUCTURAL JOURNAL, Title no. 104-S48, July-August 2007

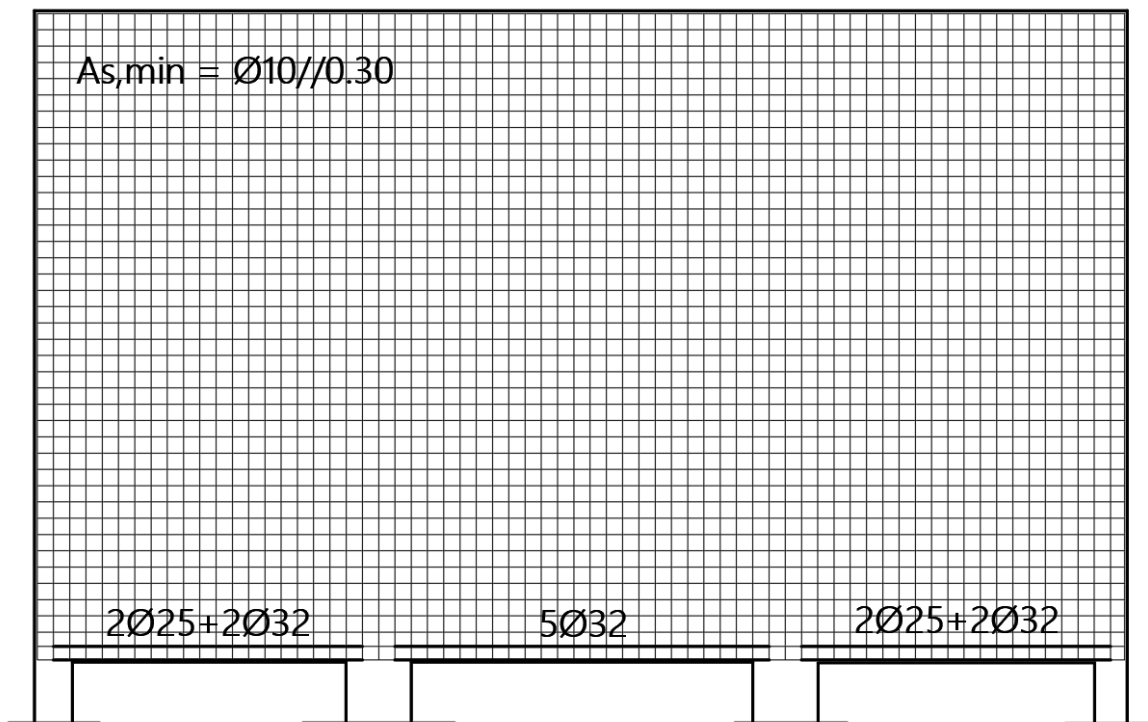
SCHLAICH, J; SCHÄFER, K – Design and Detailing of structural concrete using strut-and-tie models, The Structural Engineer, v69, No.6, March 1991

SCHLAICH, J; SCHÄFER, K; JENNEWEIN, M - Toward a Consistent Design of Concrete, PCI JOURNAL, May-June, 1987

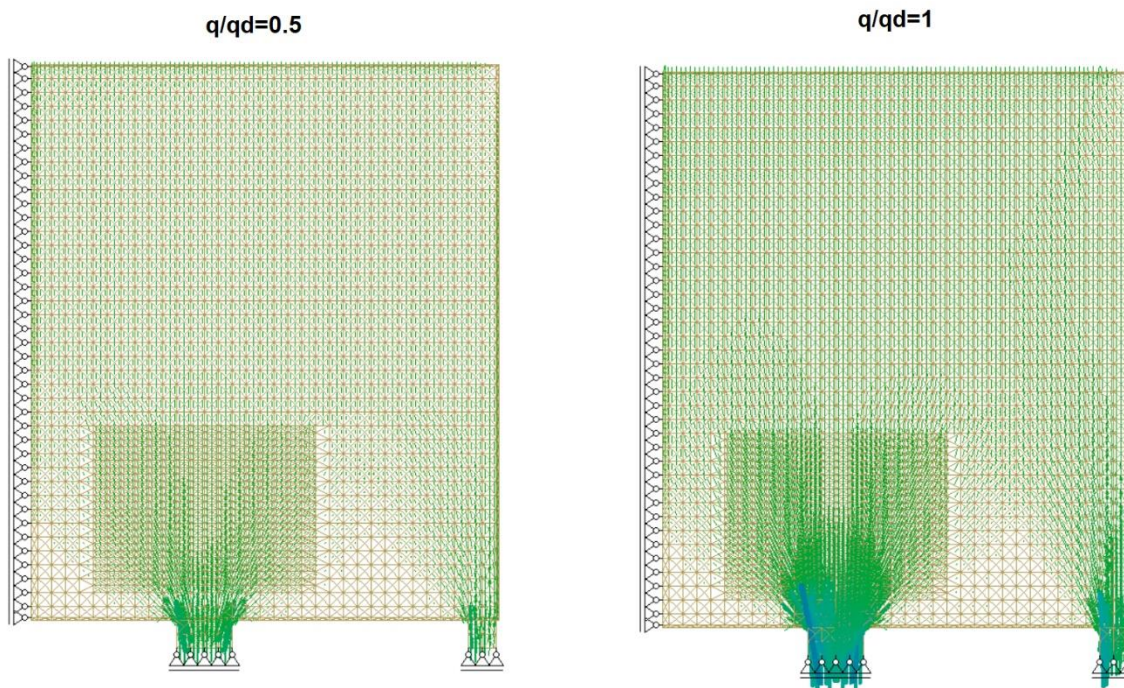
VECCHIO, F. J; COLLINS, M. P. - The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected do Shear, ACI JOURNAL, Title no. 83-22, March-April 1986

# **ANEXOS**

**ANEXO 1: 2.0-0.0-1.6 – PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**

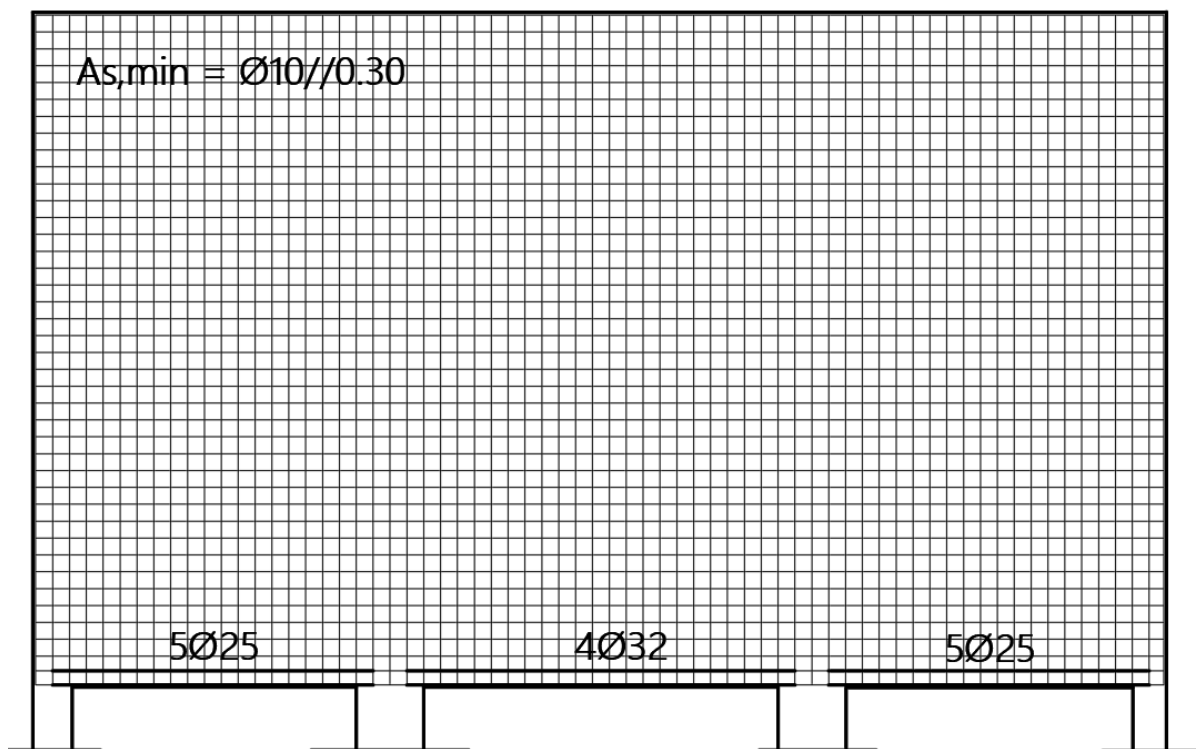


**Figura A-1** – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 2.0-0.0-1.6

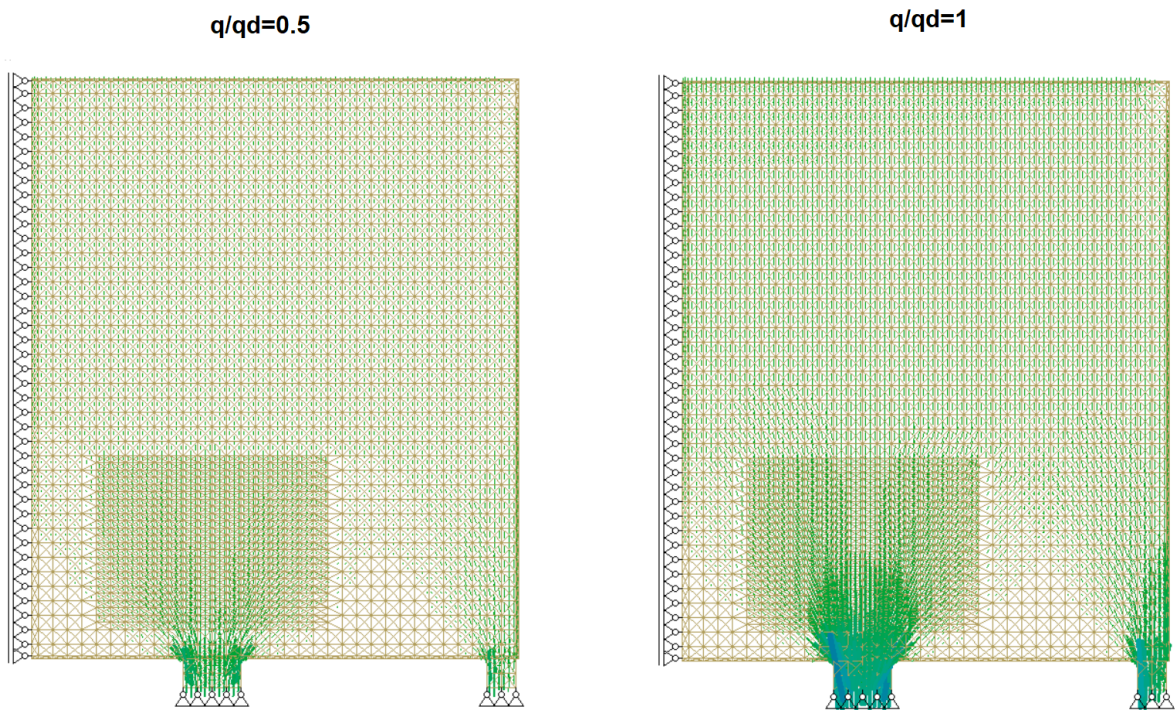


**Figura B-1** – Andamento das tensões no betão para o modelo 2.0-0.0-1.6 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .

**ANEXO 2: 1.4-0.4-1.3- PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**

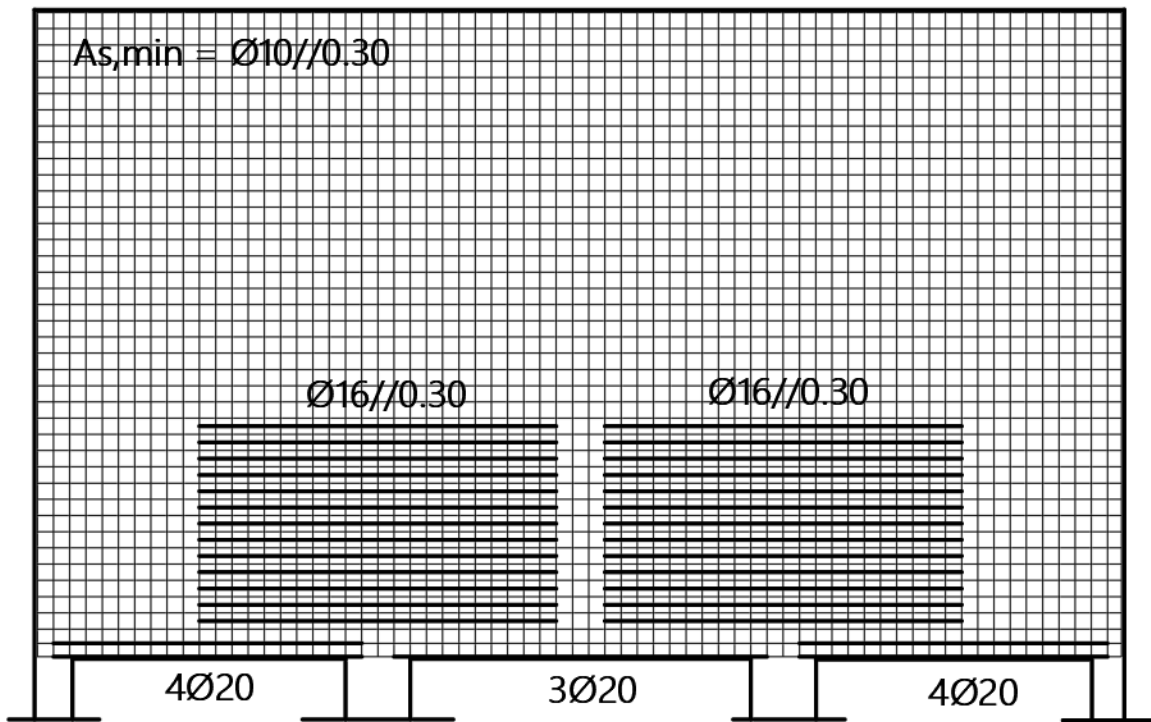


*Figura A-2 - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 1.4-0.4-1.3*

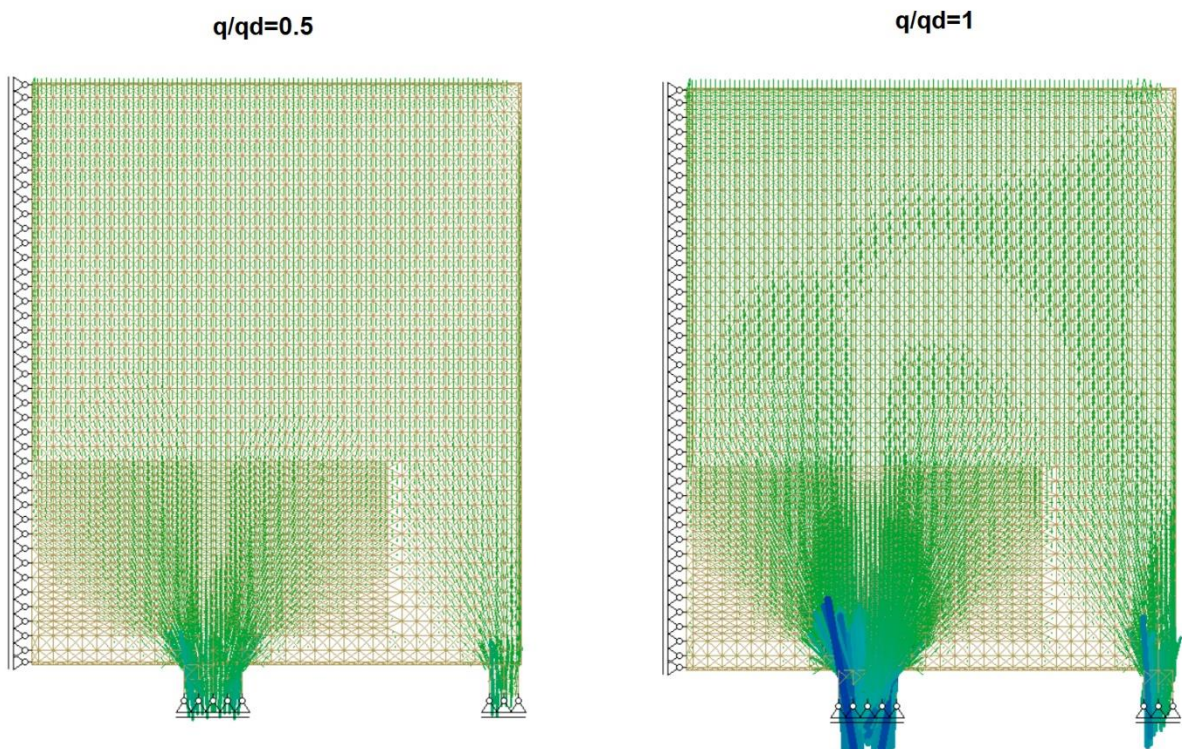


*Figura B-2 - Andamento das tensões no betão para o modelo 1.4-0.4-1.3 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .*

**ANEXO 3: 0.5-2.6-0.76 – PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**

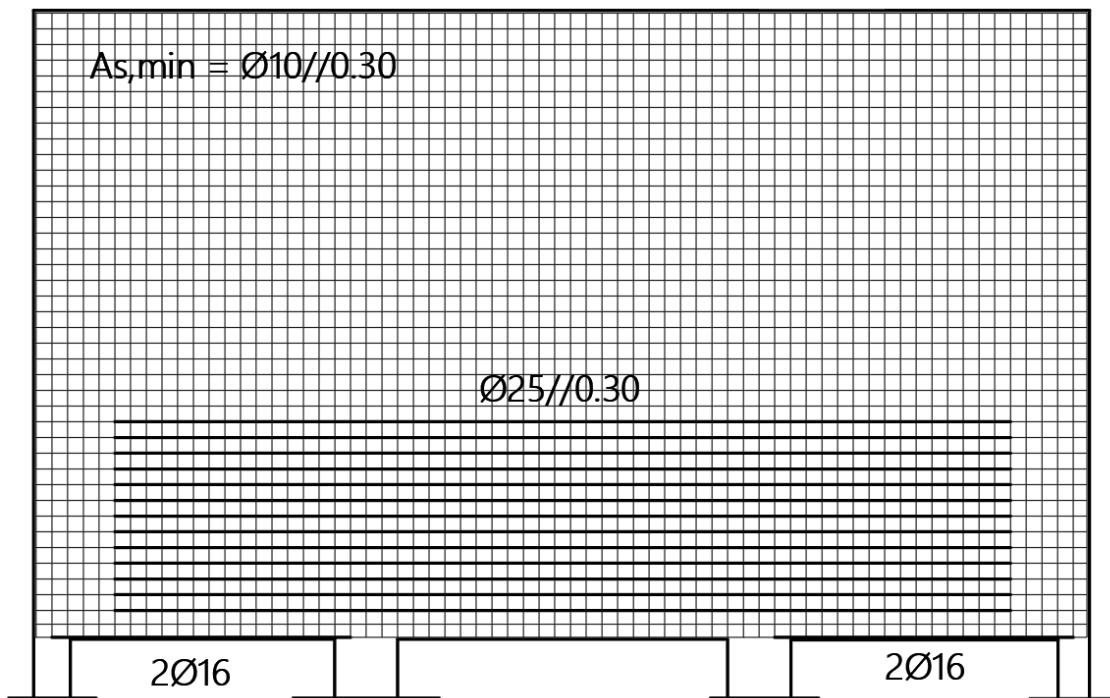


**Figure A-3** – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.5-2.6-0.76.

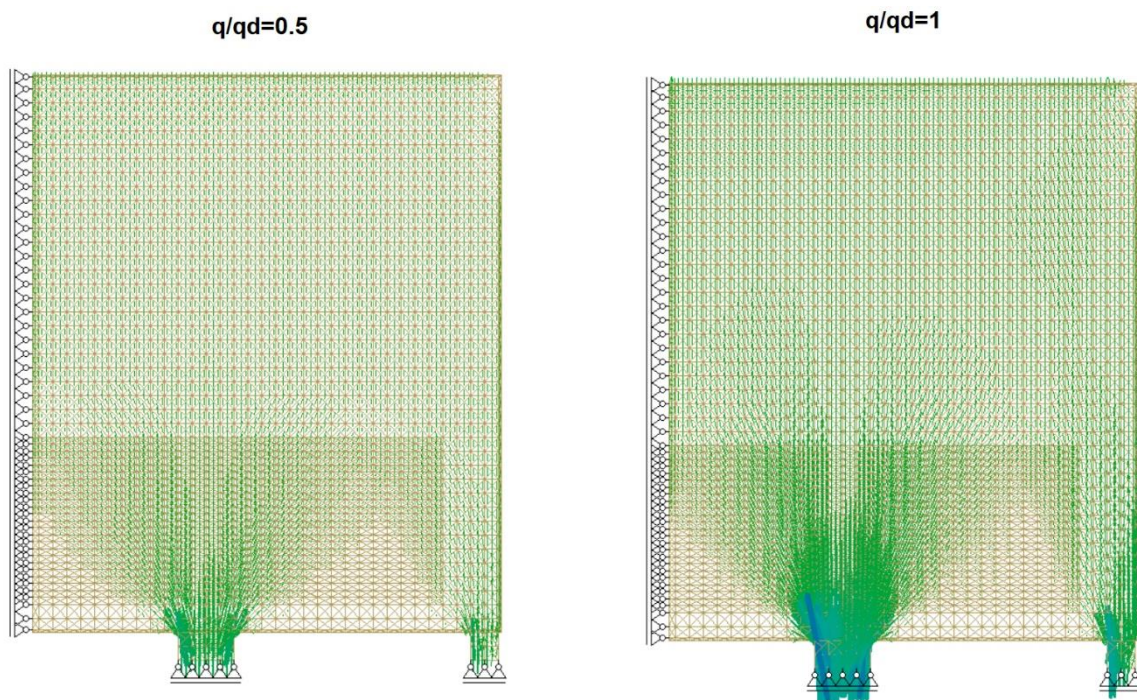


**Figura B-3** - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.5-2.6-0.76 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .

**ANEXO 4: 0.0-6.4-0.25 – PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**



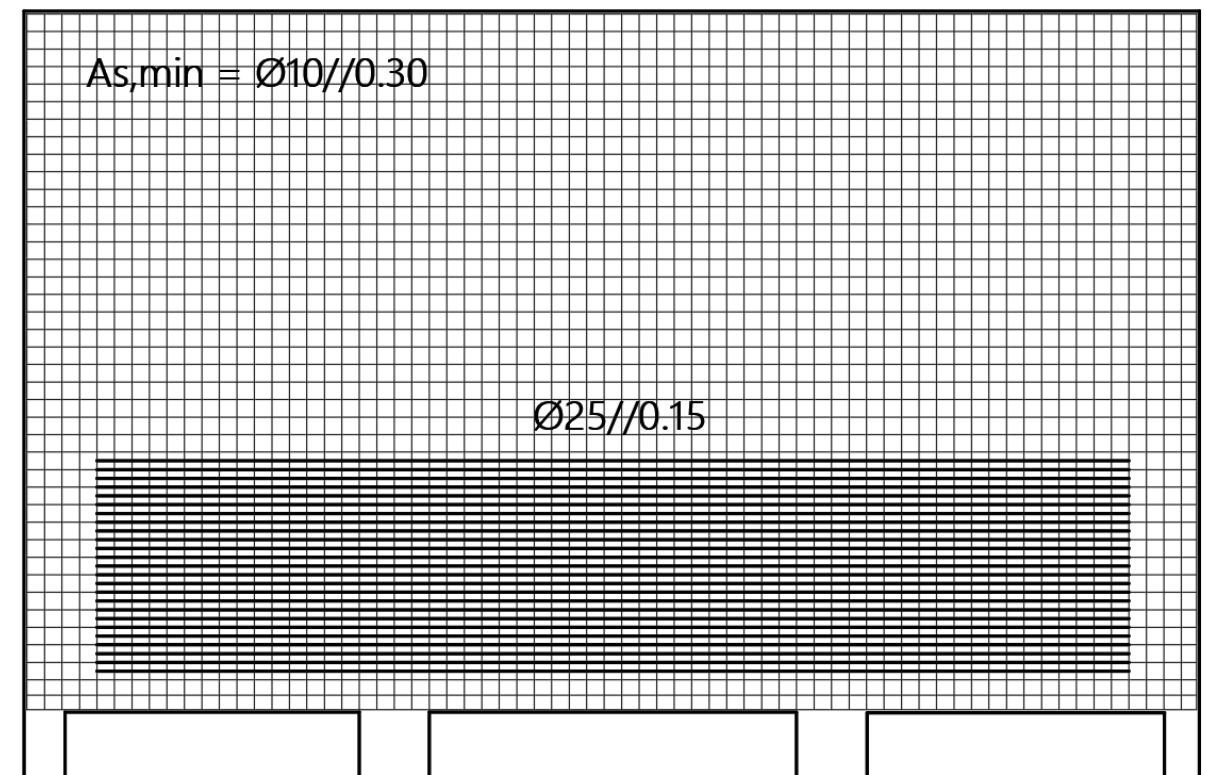
**Figura A-4** – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.0-6.4-0.25



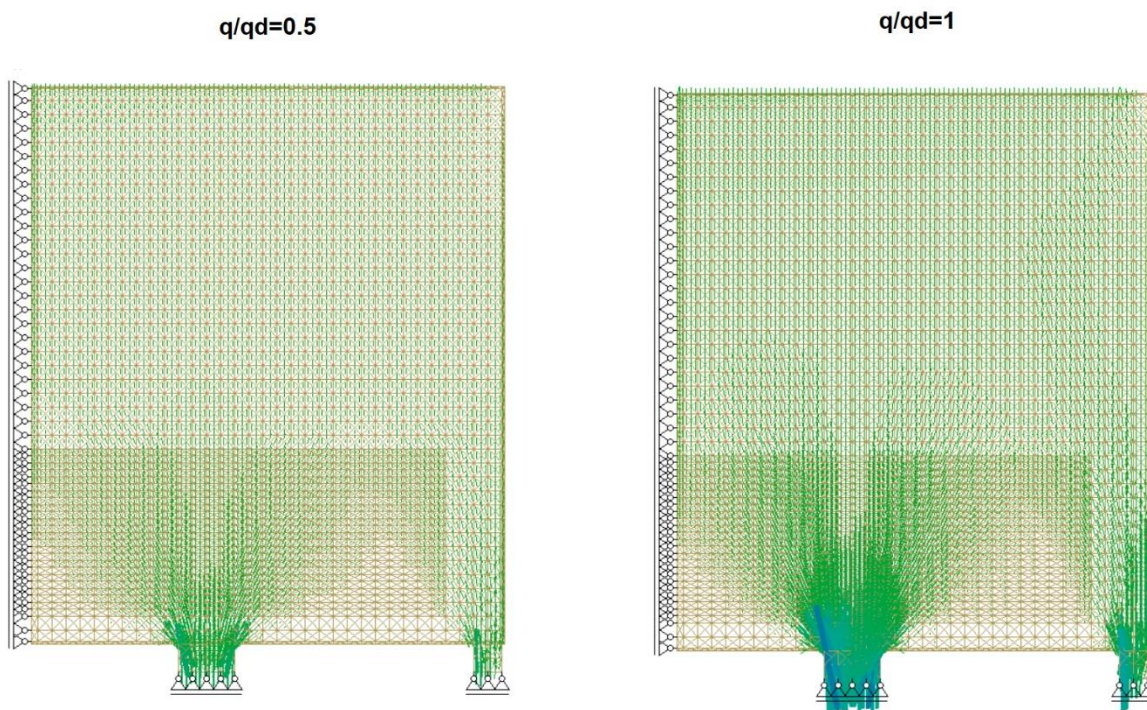
**Figura B-4** - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.0-6.4-0.25 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .



**ANEXO 5: 0.0-7.0-0.0- PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**

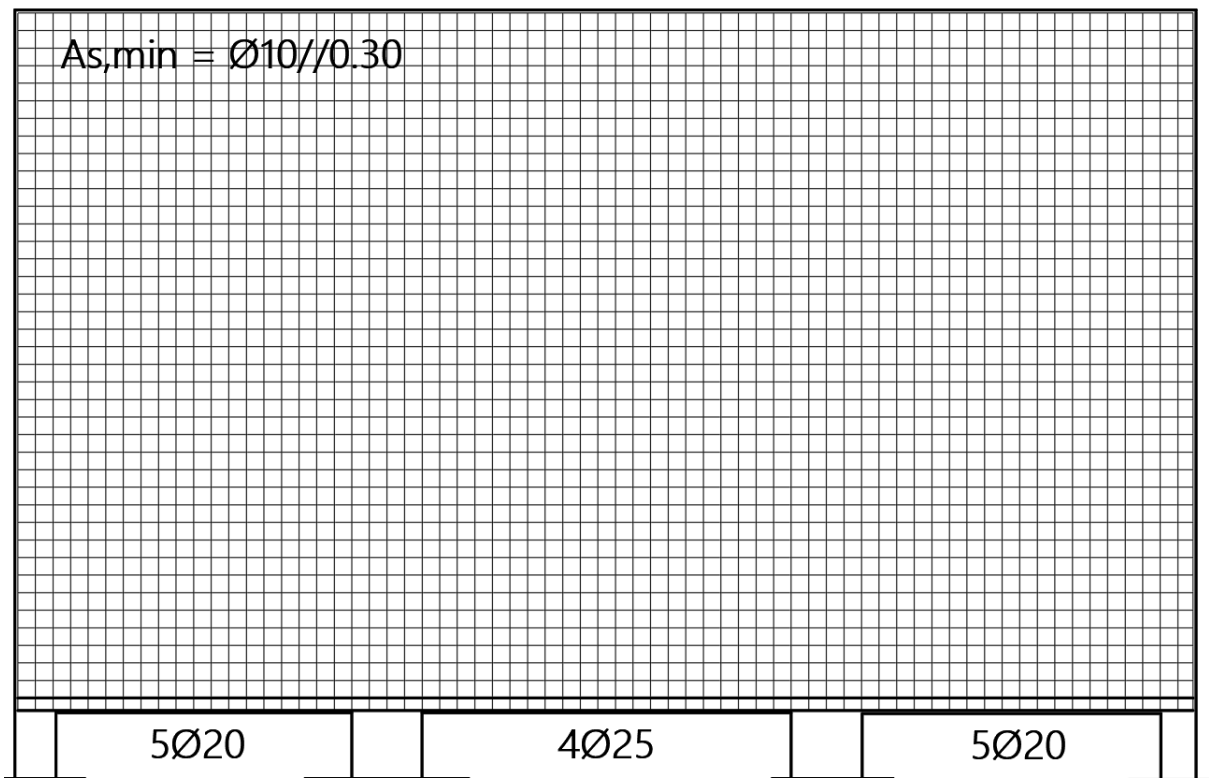


**Figura A-5** – Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.0-7.0-0.0.

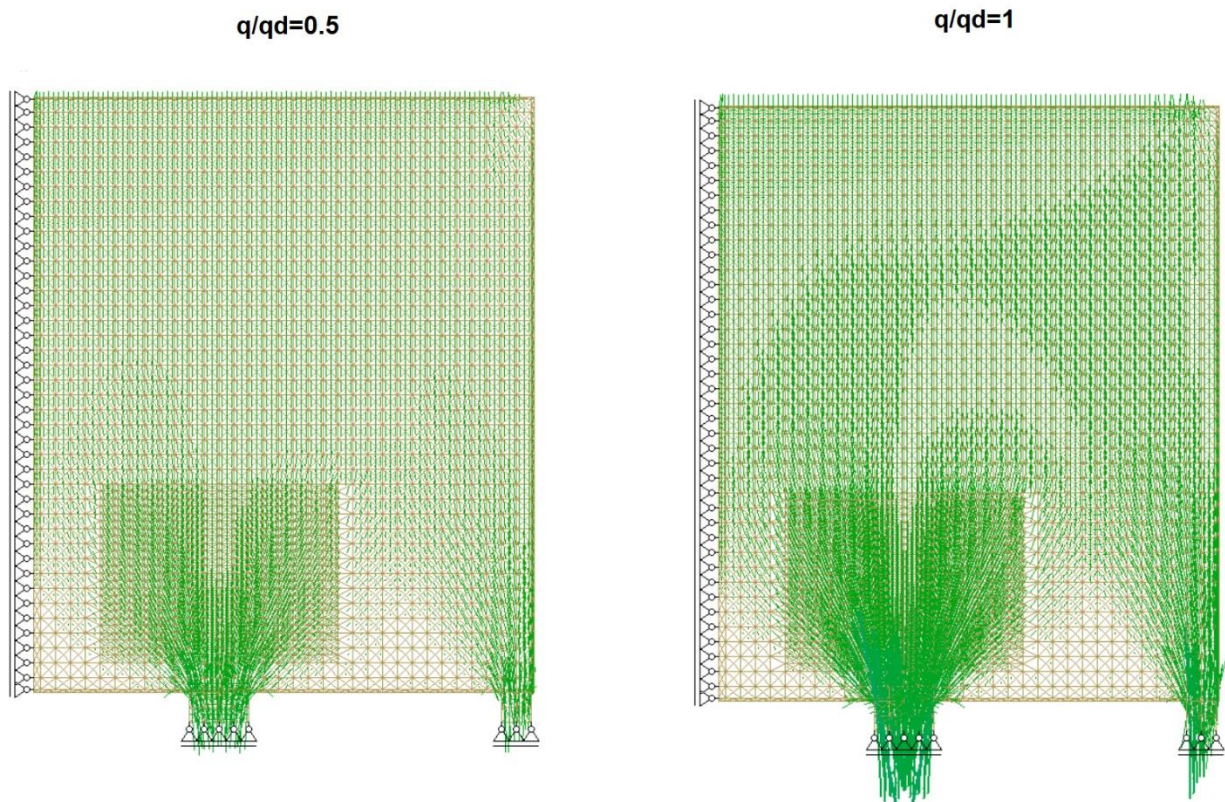


**Figura B-5** - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.0-7.0-0.0 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .

**ANEXO 6: 1.0-0.6-1.0 - PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**

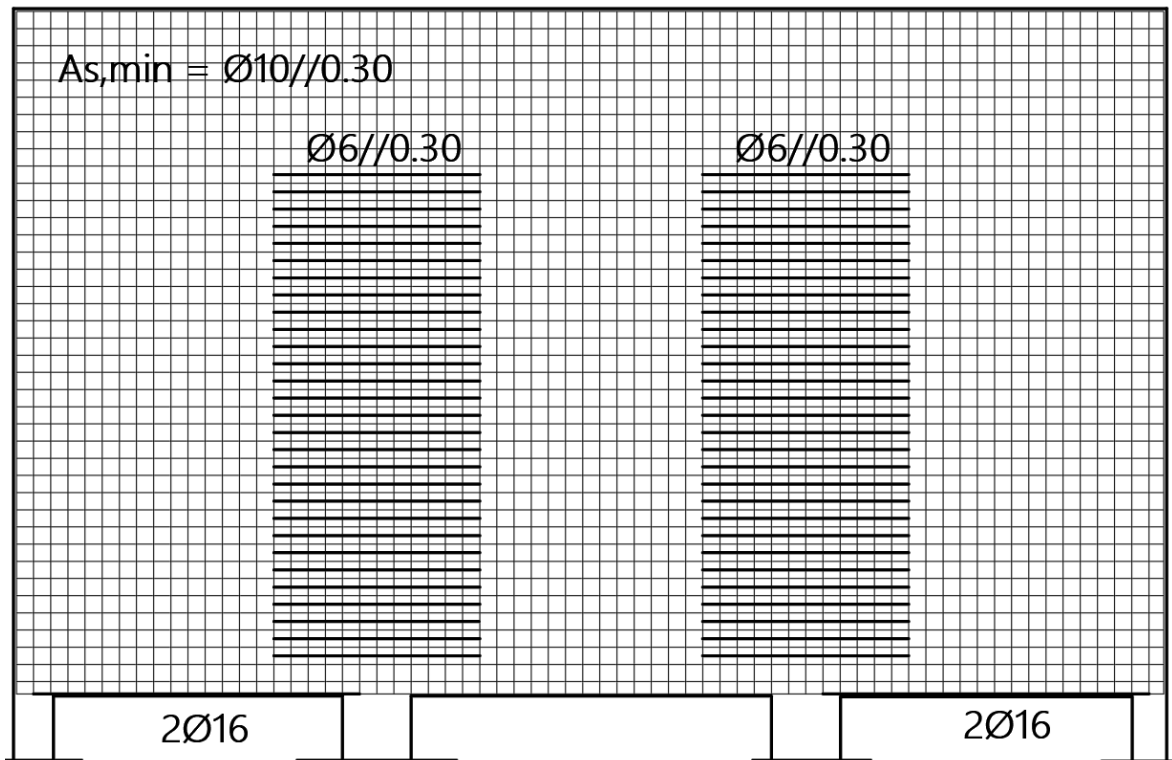


*Figura A-6 - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 1.0-0.6-1.0.*

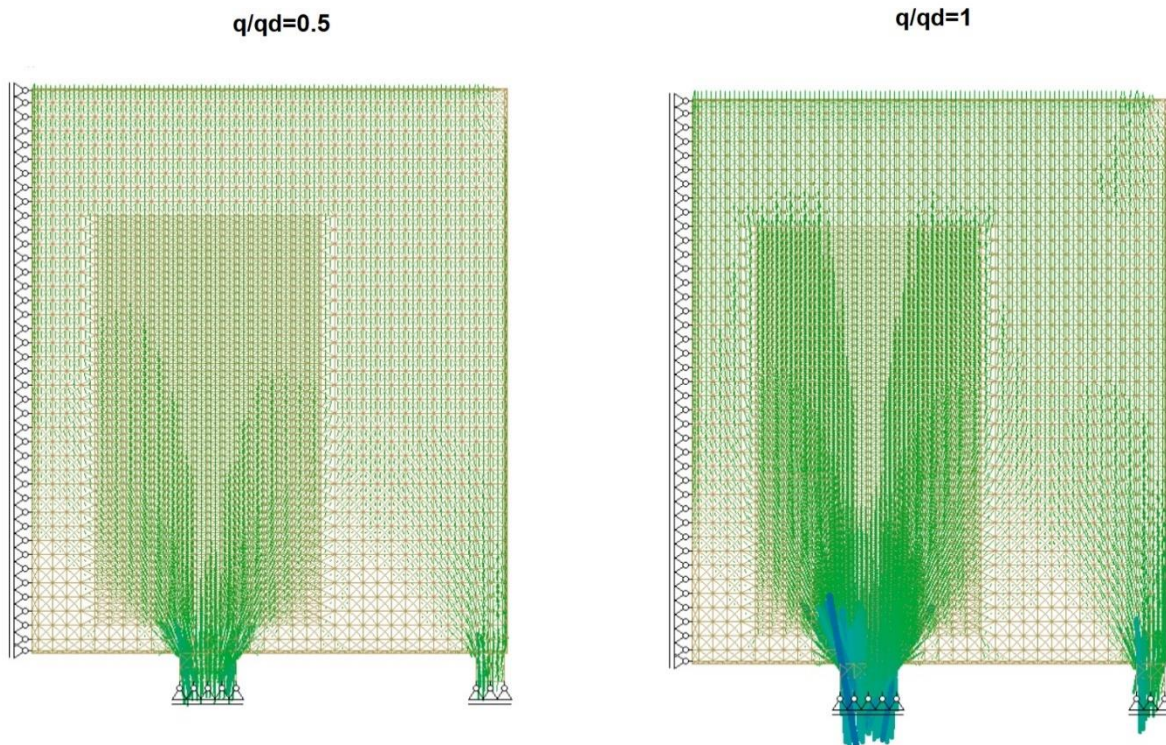


*Figura B-2 - Andamento das tensões no betão para o modelo 1.0-0.6-1.0 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .*

**ANEXO 7: 0.0-2.2-0.25 - PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**

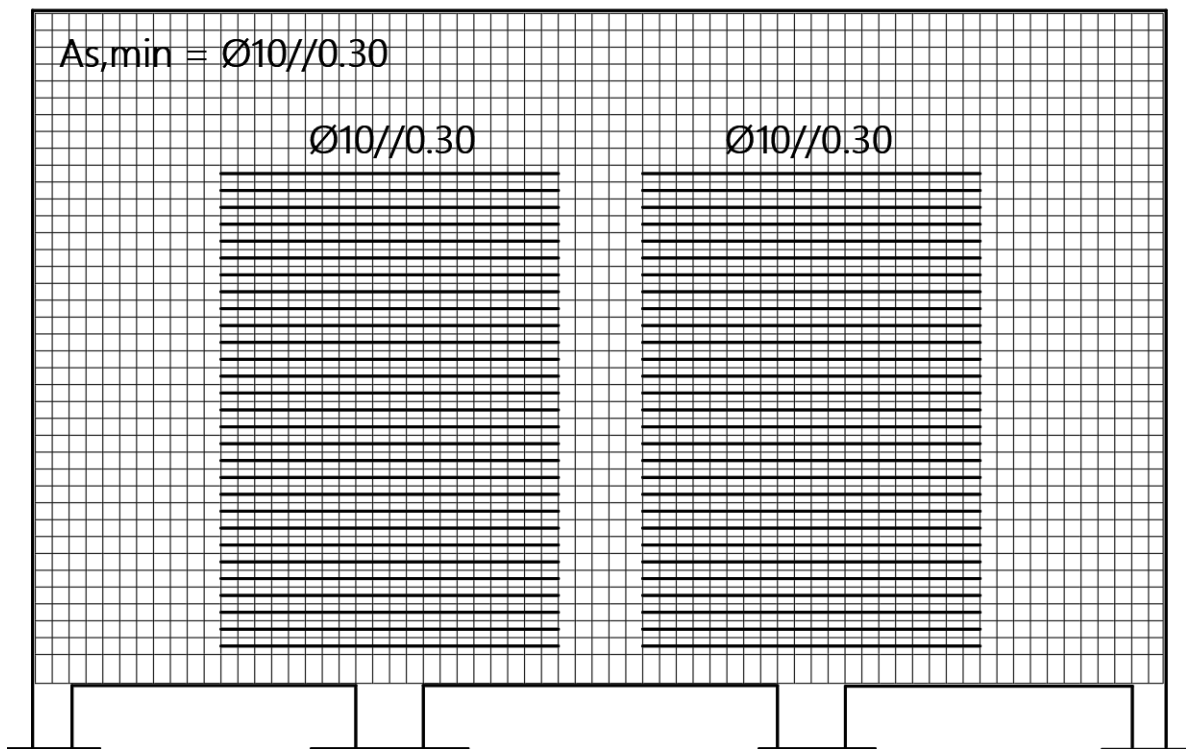


**Figura A-3** - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.0-2.2-0.25

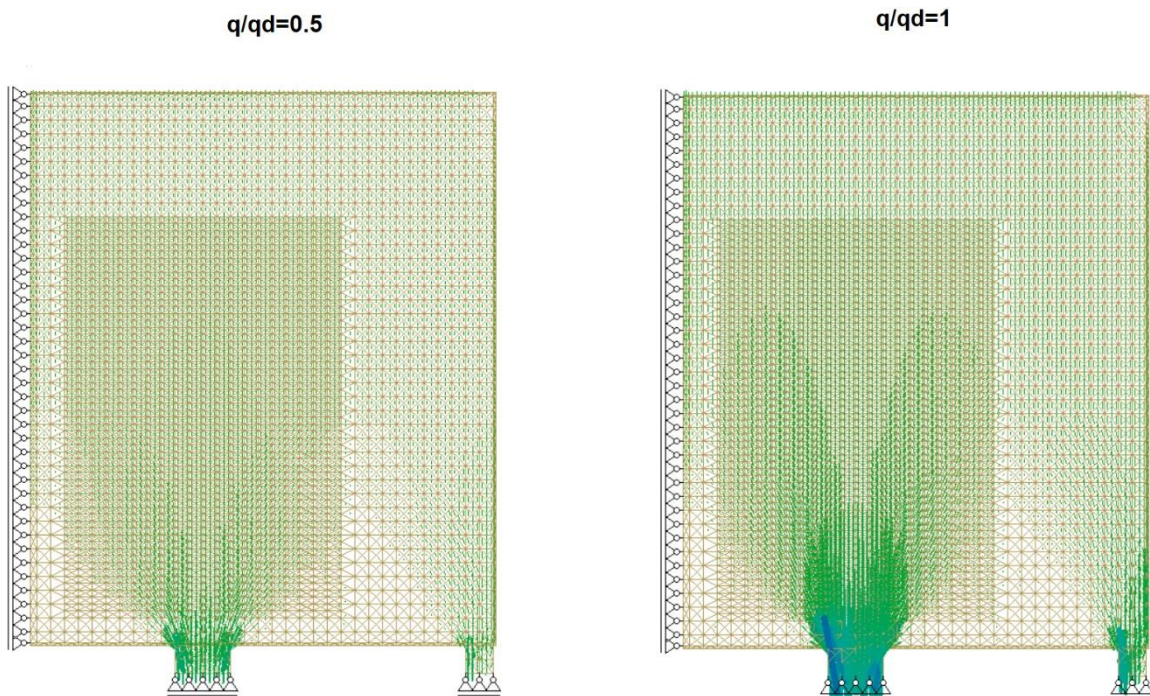


**Figura B-7** - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.0-2.2-0.25 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .

**ANEXO 8: 0.0-3.8-0.0- PORMENORIZAÇÃO E TENSÕES NO BETÃO**



**Figura A-8** - Pormenorização utilizada para a modelação do modelo 0.0-3.8-0.0.



**Figura B-8** - Andamento das tensões no betão para o modelo 0.0-3.8-0.0 nos incrementos de carga  $q/q_d=0.5$  e  $q/q_d=1$ .